Ein Halbkreis im Viertelkreis

Rätselaufgabe aus *mathsoftpuzzle*

Abbildung 1 zeigt den Kreis k_1 mit dem Radius $r = 1$ und einen Viertelkreisbogen k_2 mit dem Radius $R = 2$. Im Punkt D liegt die Tangente g_1 am Kreis k_1. Die Tangente schneidet den Viertelkreisbogen im Punkt E und die $y-$ Achse im Punkt C .
Bestimme die Gleichung der Tangente so, daß die Region ACE maximalen Flächeninhalt erhält !

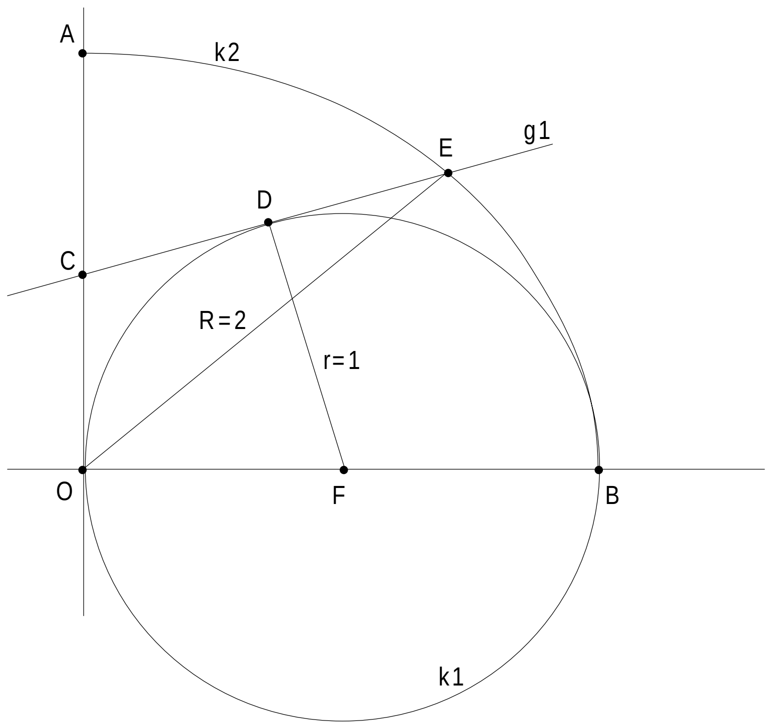

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Punktezahl=10

Lösungen

Die Fläche ACE kann auf zwei verschiedenen Wegen berechnet werden. Die klassische Methode mittels Integralrechnung ist von der Überlegung her der schnellere Ansatz. Wenn x_s, y_s die Schnittpunktkoordinaten zwischen Viertelkreisbogen und Tangente bezeichnen, so folgt ACE aus dem Integral (1):

$$A_{ACE} = \int_{-r}^{x_s} (k_2(x) - g_1(x)) \cdot dx \tag{1}$$

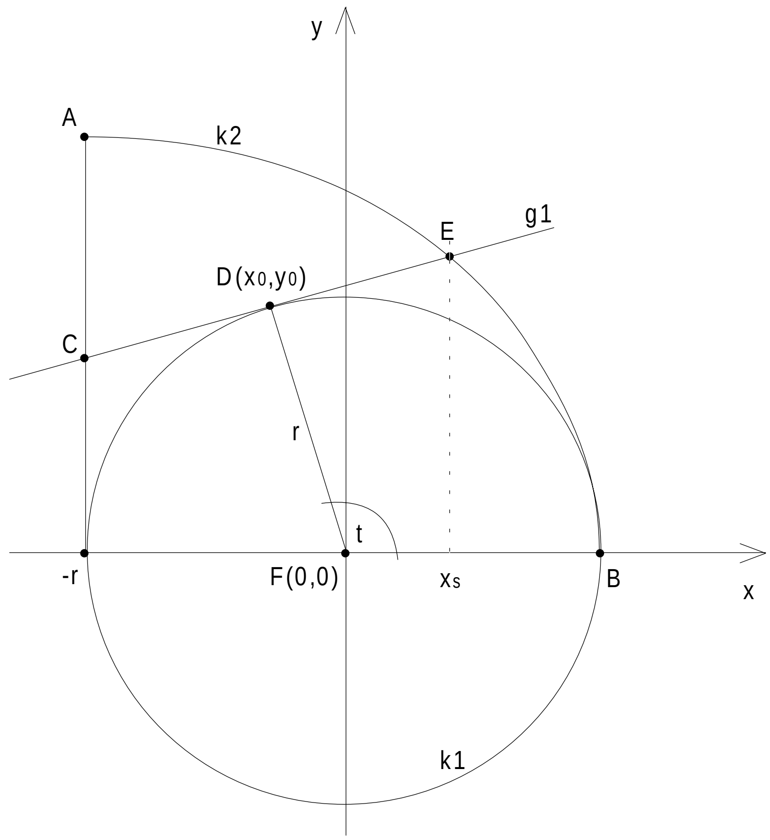

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg I

Die Auswertung des Integrals führt auf komplizierte Gleichungen, die nur mit Computerunterstützung lösbar sind.

Der zweite Weg kommt bei der Flächenberechnug mit elemetargeometrischen Methoden aus. Bei genauen Hinsehen erkennt man, das die Fläche $OBEC$ sich aus dem Kreissektor OBE und dem Dreieck OEC zusammensetzt. Dieser Weg ist vom Ansatz etwas schwieriger und verlangt gute Kenntnisse der analytischen Geometrie sowie der Formeln /Sätze rund um den Kreis.

Bei der algebraischen Umformung der Gleichungen sowie zur Differentiation / Integration sollte ein Computeralgebrasystem wie *Mathematica, Maple V* oder *MuPAD* zu Hilfe genommen werden.

Flächenberechnung mittels Integration

Als Koordinatenursprung wurde Punkt F gewählt. In Abhängigkeit vom Winkel t wird eine Formel zur Berechnung der Fläche ACE hergeleitet.

Tangentengleichung im Punkt $D(x_0, y_0)$:

$$g_1: \qquad x_0 x + y_0 y_1 = r^2 \quad \rightarrow \quad y_1 = -\frac{x_0}{y_0} \cdot x + \frac{r^2}{y_0} \tag{2}$$

Die Koordinaten von D in Abhänkigkeit von t sind über die Parameterdarstellung vom Kreis k_1 gegeben:

$$x_0 = r \cdot \cos(t), \qquad y_0 = r \cdot \sin(t) \tag{3}$$

Gleichung des Viertelkreisbogen k_2 mit Mittelpunkt $M(-r, 0)$:

$$k_2: \qquad (x+r)^2 + y_2^2 = R^2 \quad \rightarrow \quad y_2 = \sqrt{R^2 - (x+r)^2} \tag{4}$$

Schnittpunktkoordinaten zwischen g_1 und k_2:

$$\begin{aligned}
\{\{y_s \rightarrow & \tfrac{r^2}{y_0} - \tfrac{r^2 x_0{}^2}{y_0(x_0{}^2+y_0{}^2)} + \tfrac{r x_0 y_0}{x_0{}^2+y_0{}^2} - \\
& \tfrac{x_0\sqrt{-r^4 y_0{}^2 - 2r^3 x_0 y_0{}^2 - r^2 x_0{}^2 y_0{}^2 + R^2 x_0{}^2 y_0{}^2 + R^2 y_0{}^4}}{y_0(x_0{}^2+y_0{}^2)}, \\
x_s \rightarrow & \tfrac{1}{x_0{}^2+y_0{}^2}(r^2 x_0 - r y_0{}^2 + \\
& \sqrt{-r^4 y_0{}^2 - 2r^3 x_0 y_0{}^2 - r^2 x_0{}^2 y_0{}^2 + R^2 x_0{}^2 y_0{}^2 + R^2 y_0{}^4})\}, \\
\{y_s \rightarrow & \tfrac{r^2}{y_0} - \tfrac{r^2 x_0{}^2}{y_0(x_0{}^2+y_0{}^2)} + \tfrac{r x_0 y_0}{x_0{}^2+y_0{}^2} + \\
& \tfrac{x_0\sqrt{-r^4 y_0{}^2 - 2r^3 x_0 y_0{}^2 - r^2 x_0{}^2 y_0{}^2 + R^2 x_0{}^2 y_0{}^2 + R^2 y_0{}^4}}{y_0(x_0{}^2+y_0{}^2)}, \\
x_s \rightarrow & \tfrac{1}{x_0{}^2+y_0{}^2}(r^2 x_0 - r y_0{}^2 - \\
& \sqrt{-r^4 y_0{}^2 - 2r^3 x_0 y_0{}^2 - r^2 x_0{}^2 y_0{}^2 + R^2 x_0{}^2 y_0{}^2 + R^2 y_0{}^4})\}\}
\end{aligned}$$

Von den zwei Schnittpunkten muß die positive Lösung mit $x_s > 0$, $y_s > 0$ gewählt werden. Der gesuchte Flächeninhalt ACE berechnet sich aus:

$$A = \int_{-r}^{x_s} (y_2 - y_1) \cdot dx = \int_{-r}^{x_s} \left(\sqrt{R^2 - (x+r)^2} + \frac{x_0}{y_0} \cdot x - \frac{r^2}{y_0} \right) \cdot dx \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
A = & -\tfrac{r^2(2r+x_0)}{2y_0} + \tfrac{1}{2y_0} \\
& \Big(-2r^2 x_s + r\sqrt{R^2 - (r+x_s)^2}\, y_0 + x_s(x_0 x_s + \sqrt{R^2 - (r+x_s)^2}\, y_0) + \\
& \quad R^2 y_0 \arctan[\tfrac{r+x_s}{\sqrt{-r^2+R^2-2r x_s - x_s{}^2}}] \Big)
\end{aligned}$$

Wir ersetzen die Koordinaten x_0, y_0 durch die Paramterdartsellung (3) und setzen $r = 1$, $R = 2$:

$$A = -\tfrac{1}{2}(2+\cos[t])\csc[t] + \tfrac{1}{2}\csc[t]\Big(-2x_s + \sqrt{4-(1+x_s)^2}\sin[t] + 4\arctan[\tfrac{1+x_s}{\sqrt{3-2x_s-{x_s}^2}}]\sin[t] + x_s(x_s\cos[t] + \sqrt{4-(1+x_s)^2}\sin[t])\Big)$$

Anschließend wird x_s durch die oben ermittelte Schnittpunktkoordinate ersetzt:

$$x_s = \cos[t] - \sin[t]^2 + \frac{\sqrt{-(-5+4\cos[t]+\cos[2t])\sin[t]^2}}{\sqrt{2}} \tag{6}$$

$$A(t) = \tfrac{1}{2}\Bigg(4\arctan[\Big(1+\cos[t] - \sin[t]^2 + \tfrac{\sqrt{(5-4\cos[t]-\cos[2t])\sin[t]^2}}{\sqrt{2}}\Big)\Big/\Big(\sqrt{\Big(-\Big(-1+\cos[t]-\sin[t]^2 + \tfrac{\sqrt{(5-4\cos[t]-\cos[2t])\sin[t]^2}}{\sqrt{2}}\Big)\Big(3+\cos[t]-\sin[t]^2 + \tfrac{\sqrt{(5-4\cos[t]-\cos[2t])\sin[t]^2}}{\sqrt{2}}\Big)\Big)}\Big)] + \Big(1+\cos[t]-\sin[t]^2+\tfrac{\sqrt{(5-4\cos[t]-\cos[2t])\sin[t]^2}}{\sqrt{2}}\Big)\Big(-2\csc[t] + \cot[t]\Big(-1+\cos[t] - \sin[t]^2 + \tfrac{\sqrt{(5-4\cos[t]-\cos[2t])\sin[t]^2}}{\sqrt{2}}\Big) + \sqrt{\Big(-\Big(-1+\cos[t]-\sin[t]^2+\tfrac{\sqrt{(5-4\cos[t]-\cos[2t])\sin[t]^2}}{\sqrt{2}}\Big)\Big(3+\cos[t]-\sin[t]^2+\tfrac{\sqrt{(5-4\cos[t]-\cos[2t])\sin[t]^2}}{\sqrt{2}}\Big)\Big)}\Big)\Bigg)$$

Die Funktion $A(t)$ ist recht kompliziert. Der übliche Weg zur Maximumbestimmung über die 1.Ableitung wird deshalb umgangen. Aus dem graphischen Verlauf $A(t)$ kann ein Startwert zur numerischen Maximumfindung ermittelt werden. Mit Hilfe von *Mathematica* findet man als Lösung:

$$t_{max} = 1.7471\,rad = 100.1^\circ, \qquad A_{max} = 1.24834 \tag{7}$$

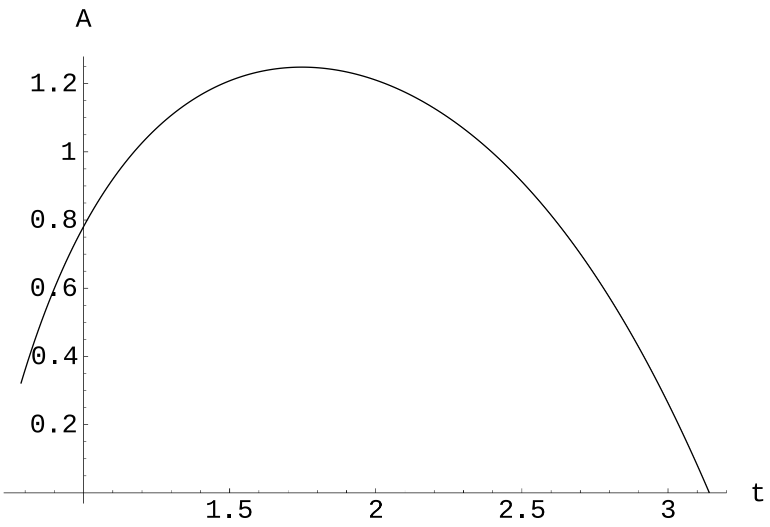

Abbildung 3: Funktion $A(t)$ im Intervall $\frac{\pi}{4} \leq t \leq \pi$

Flächenberechnung über die Kreisformel

Bei diesem Lösungsweg minimieren wir den Flächeninhalt A_{OBEC} was zur Aufgabenstellung (Maximum von A_{ACE}) äquivalent ist.

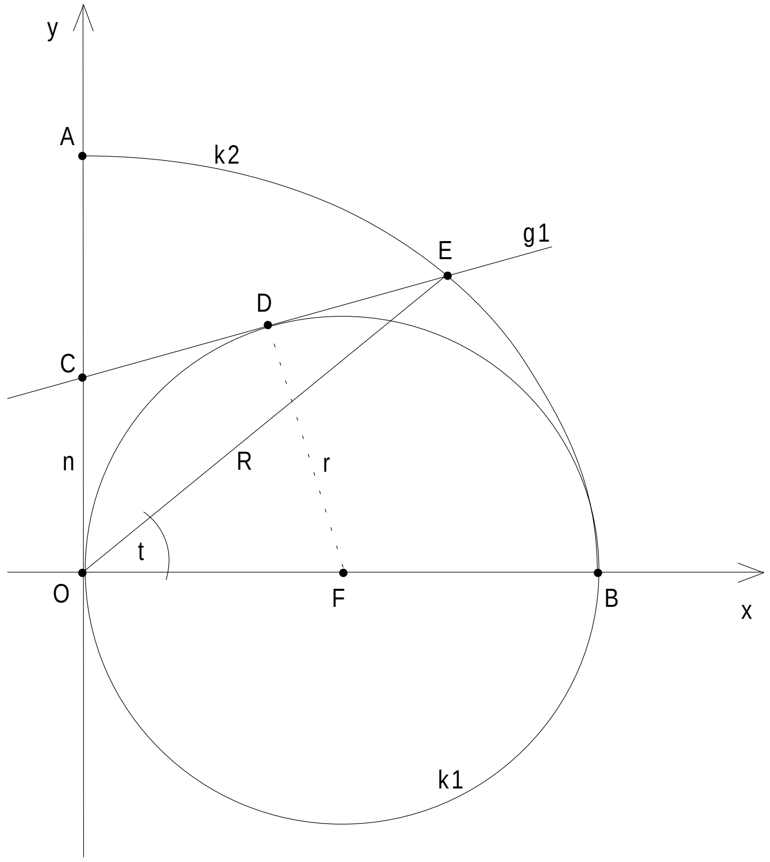

Abbildung 4: Skizze zum Lösungsweg II

Der Flächeninhalt für $OBEC$ setzt sich aus dem Kreissektor $\sphericalangle OBE$ und dem Dreieck $\triangle OEC$ zusammen:

$$A_{OBEC} = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot R \cdot n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot R \cdot n \cdot \cos(t) \quad (8)$$

Die Strecke n ist vom Winkel t abhängig. Zur Ableitung der Funktion $n(t)$ sind zwei Wege möglich.

Ableitung der Funktion $n(t)$ aus der Tangentengleichung

Geradengleichung der Tangente in allgemeiner Form :

$$g_1: \quad y = m \cdot x + n \tag{9}$$

Kreisgleichung für k_1 mit Mittelpunkt in $M(r, 0)$:

$$k_1: \quad (x-r)^2 + y^2 = r^2 \tag{10}$$

Die möglichen Schnittpunkte zwischen g_1 und k_1 ergeben sich aus:

$$k_1 = g_1 \quad (x-r)^2 + (m \cdot x + n)^2 = r^2 \tag{11}$$

Lösung der quadratischen Gleichung :

$$x_1 = \frac{-mn + r + \sqrt{r^2 + 2mnr - n^2}}{1 + m^2} \tag{12}$$

$$x_2 = \frac{-mn + r - \sqrt{r^2 + 2mnr - n^2}}{1 + m^2} \tag{13}$$

Da g_1 Tangente in D ist, müssen beide Punkte zusammenfallen. Mit anderen Worten suchen wir die relle Doppellösung, d.h. die Diskriminante muß identisch Null sein:

$$0 = r^2 - 2mnr - n^2 \quad \rightarrow \quad m = \frac{r^2 - n^2}{2nr} \tag{14}$$

Die Größen m und n stehen also in einem abhängigen Verhältnis zueinander. In der Tangentengleichung kann m durch n ersetzt werden :

$$g_1: \quad y = \frac{r^2 - n^2}{2nr} \cdot x + n \tag{15}$$

Um die Größe n als $n(t)$ zu bestimmen, setzen wir nun die Schnittpunktkoordinaten von E in die Tangentengleichung ein und lösen nach n auf:

$$x_e = R\cos(t), \qquad y_e = R\sin(t) \tag{16}$$

$$g_1: \quad R\sin(t) = \frac{r^2 - n^2}{2nr} \cdot R\cos(t) + n \tag{17}$$

$$n(t) = \frac{rR\sin[t] + \sqrt{-2r^3R\cos[t] + r^2R^2\cos[t]^2 + r^2R^2\sin[t]^2}}{2r - R\cos[t]} \tag{18}$$

Für $r = 1$ und $R = 2$ vereinfacht sich der Ausdruck wie folgt:

$$n(t) = -\frac{\sqrt{1 - \cos[t]} + \sin[t]}{-1 + \cos[t]} \tag{19}$$

Ableitung der Funktion $n(t)$ aus der Kreisgeometrie

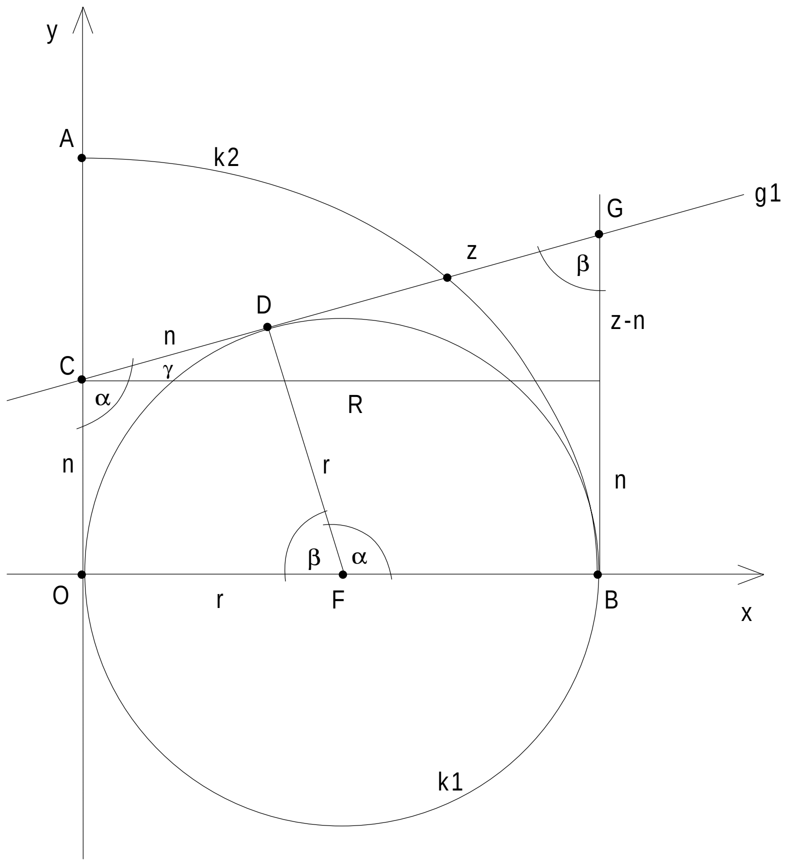

Abbildung 5: Skizze zum Lösungsweg II

Satz *Legt man von einem äußeren Punkt die Tangenten an einen Kreis, so sind die Tangentenabschnitte stets gleich lang.*

In Abbildung 5 gilt damit:

$$\overline{OC} = \overline{CD} = n, \qquad \overline{BG} = \overline{DG} = z \tag{20}$$

Die Drachenvierecke $OFDC$ und $FDGB$ sind einander ähnlich, da die Innenwinkel identisch sind. Es läßt sich die folgende Beziehung zwischen den Strecken n und z aufstellen:

$$\frac{r}{n} = \frac{z}{r} \quad \rightarrow \quad n \cdot z = r^2 \tag{21}$$

Der Tanges vom Winkel γ berechnet sich aus:

$$\tan(\gamma) = \frac{z - n}{R} = \frac{R\sin(t) - n}{R\cos(t)} \tag{22}$$

Mit $z = \frac{r^2}{n}$ erhalten wir :

$$\frac{r^2 - n^2}{R \cdot n} = \frac{R\sin(t) - n}{R\cos(t)} \tag{23}$$

Die Auflösung der Gleichung ergibt:

$$n(t) = \frac{R\tan[t] + \sqrt{-4r^2(-1+\sec[t]) + R^2\tan[t]^2}}{2(-1+\sec[t])} \tag{24}$$

Für $r = 1$ und $R = 2$ erhält man:

$$n(t) = \frac{\sqrt{(-1+\sec[t])\sec[t]} + \tan[t]}{-1+\sec[t]} \tag{25}$$

Berechnung des Minimums der Funktion $A(t)$

Das Ergebnis $n(t)$ wird nun in die Ausgangsgleichung $A(t)$ eingesetzt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot R \cdot \frac{\sqrt{R}\sqrt{R - 2\cos[t]} - R\sin[t]}{-2 + R\cos[t]} \cdot \cos(t) \tag{26}$$

Wir bestimmen den Extremwert der Funktion $A(t)$ aus den Nullstellen der ersten Ableitung:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2\cos[t]\sin[t]\left(\sqrt{R}\sqrt{R-2\cos[t]} - R\sin[t]\right)}{2(-2+R\cos[t])^2} - \frac{R\sin[t]\left(\sqrt{R}\sqrt{R-2\cos[t]} - R\sin[t]\right)}{2(-2+R\cos[t])} + \frac{R\cos[t]\left(-R\cos[t] + \frac{\sqrt{R}\sin[t]}{\sqrt{R-2\cos[t]}}\right)}{2(-2+R\cos[t])}$$

Um die Gleichung algebraisch zu Lösen, ersetzen wie vorübergehend die Winkelfunktionen durch rationale Terme:

$$\cos(t) = z, \qquad \sin(t) = \sqrt{1 - z^2} \tag{27}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2 z\sqrt{1-z^2}\left(\sqrt{R}\sqrt{R-2z} - R\sqrt{1-z^2}\right)}{2(-2+Rz)^2} - \frac{R\sqrt{1-z^2}\left(\sqrt{R}\sqrt{R-2z} - R\sqrt{1-z^2}\right)}{2(-2+Rz)} + \frac{Rz\left(-Rz + \frac{\sqrt{R}\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{R-2z}}\right)}{2(-2+Rz)}$$

Die Gleichung liefert für z die folgende Lösungsmenge:

$$\{\{z_1 = -1 + R\}, \{z_2 = 1 + R\}, \{z_3 = \frac{9+R^2-\sqrt{81-14R^2+R^4}}{4R}\}, \{z_4 = \frac{9+R^2+\sqrt{81-14R^2+R^4}}{4R}\}\}$$

Als einzig sinnvolle Lösung kommt z_3 in Frage:

$$z = \frac{9 + R^2 - \sqrt{81 - 14R^2 + R^4}}{4R} = \cos(t) \tag{28}$$

In der Funktion $n(t)$ kann $\cos(t)$ und $\sin(t)$ nun durch z ersetzt werden:

$$n(t) = \frac{\sqrt{R}\sqrt{R - 2\cos[t]} - R\sin[t]}{-2 + R\cos[t]} = \frac{\sqrt{R}\sqrt{R - 2z} - R\sqrt{1 - z^2}}{-2 + Rz} \tag{29}$$

$$n = \frac{4\left(\frac{\sqrt{R}\sqrt{\frac{-9+R^2+\sqrt{81-14R^2+R^4}}{R}}}{\sqrt{2}} - R\sqrt{1 - \frac{\left(9+R^2-\sqrt{81-14R^2+R^4}\right)^2}{16R^2}}\right)}{1 + R^2 - \sqrt{81 - 14R^2 + R^4}}$$

Für $R = 2$ erhalten wir :

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}(-5 + \sqrt{41})} \tag{30}$$

Das Ergebnis setzen wir in Gleichung (15) ein und erhalten die optimale Tangentengleichung:

$$g_1 : \quad y_{opt} = \frac{1}{4}\sqrt{-\frac{31}{2} + \frac{5\sqrt{41}}{2}} \cdot x + \sqrt{\frac{1}{2}(-5 + \sqrt{41})} \tag{31}$$

Zum Abschluß lösen wir die transzendente Gleichung $z = \cos(t)$:

$$z = \frac{9 + R^2 - \sqrt{81 - 14R^2 + R^4}}{4R} = \cos(t) \tag{32}$$

$$t_{min} = \arccos\left[\frac{1}{8}\left(13 - \sqrt{41}\right)\right] = 0.601285\, rad = 34.451° \tag{33}$$

Abbildung 6 zeigt den Funktionsverlauf $A(t)$ im Intervall $\pi/10 \leq t \leq \pi/3$ Durch Subtraktion von der Viertelkreisfläche erhält man die Fläche A_{ACE} (Abbildung 7).

$$A_{ACE} = \frac{\pi}{4} \cdot R^2 - A(t) \tag{34}$$

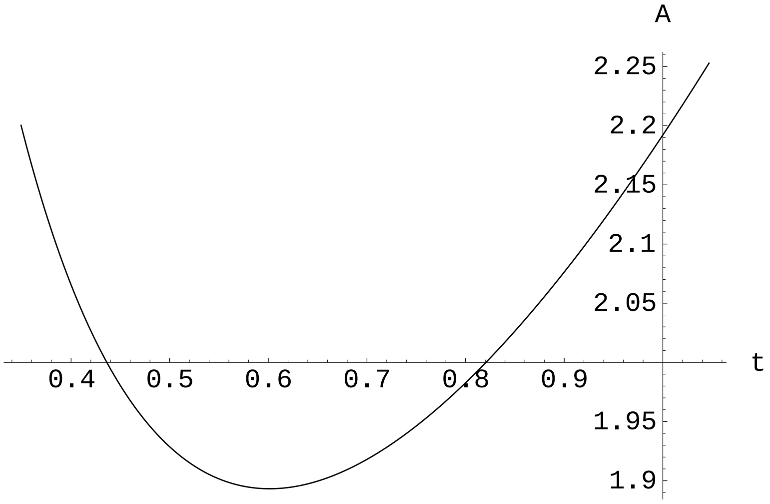

Abbildung 6: Minimum der Funktion $A(t)$ bei $t = 0.601$

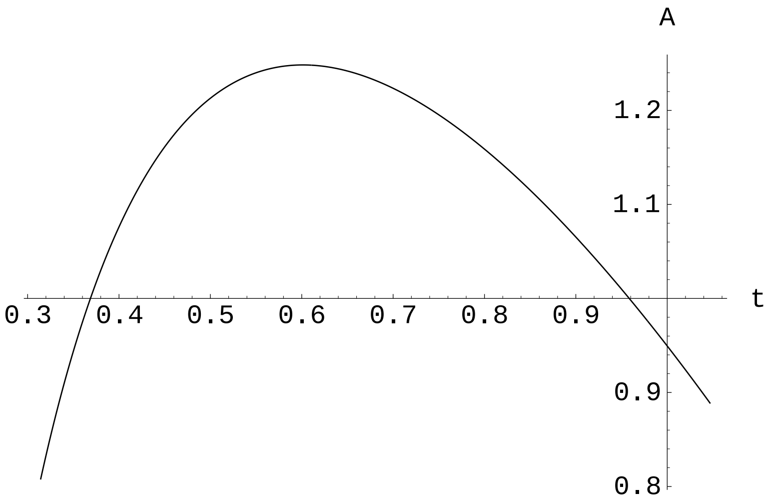

Abbildung 7: Fläche A_{ACE} in Abhängigkeit von t