Viereck contra Dreieck

Eine Rätselaufgabe von Ingmar Rubin, Berlin

9. Oktober 2013

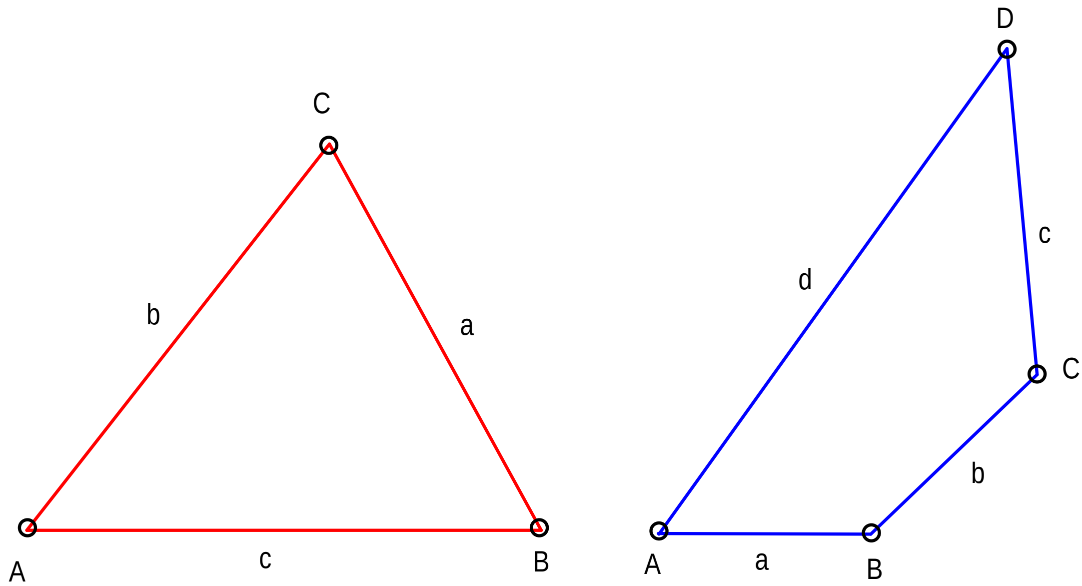

Abbildung 1: Bild zur Aufgabenstellung

Gabi, Petra und Thomas fertigen in der Mathematik AG verschiedene Polygone aus einem Modellbaukasten an. Die Streben besitzen an ihren Enden Drehgelenke über die sie mit weiteren Streben verbunden werden. Gabi hat ein Dreieck mit unterschiedlichen Seitenlängen a, b, c zusammengestellt. Thomas hat das Modell eines allgemeinen Vierecks aus Streben mit gößer werdender Länge angefertigt ($a < b < c < d$). Während das Dreieck unbeweglich ist (alle Innenwinkel sind fest) kann das Viereck in beliebig viele Positionen verstellt werden. Zu jedem Polygon soll nun eine Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes notiert werden. Petra kennt vom Dreieck die *Flächenforeml von Heron* wonach alle Dreiecke mit konstanten Seitenlängen den gleichen Flächeninhalt besitzen.

$$A_{\triangle} = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}, \qquad s = \frac{a+b+c}{2} \tag{1}$$

Beim allgemeinen Viereck ist die Situation komplizierter. Lehrer Karl gibt seinen Mathematikassen folgende Aufgaben auf den Heimweg :

1. Bestimme von allen Vierecken $ABCD$ mit den Seitenlängen $a < b < c < d$ das jenige welches maximalen Flächeninhalt besitzt !

2. Berechne für die Seitenlängen $a = 3\,cm$, $b = 4\,cm$, $c = 5\,cm$ und $d = 8\,cm$ den maximalen Flächeninhalt des Vierecks !

3. Konstruiere das maximale Viereck mit Zirkel und einem skalierten Lineal.

Punktezahl = 8

Die verallgemeinerte Flächenformel von *Brahmagupta*

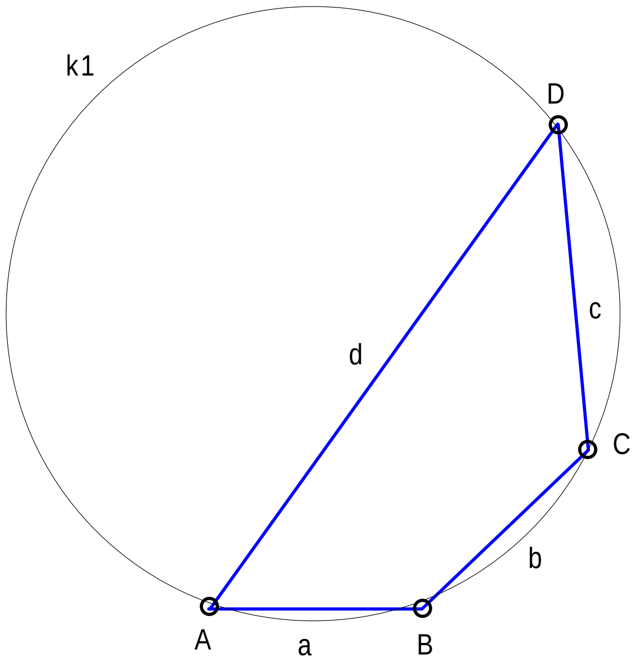

Abbildung 2: Das Sehnenviereck ergibt von allen Vierecken den maximalen Flächeninhalt bei gegebenen Seitenlängen

Mit s bezeichne wir den halben Umfang des Vierecks $ABCD$, d.h.

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} \tag{2}$$

Die verallgemeinerte Flächenformel von *Brahmagupta* lautet dann:

$$F = \sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d) - a\,b\,c\,d\,\cos\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)^2} \tag{3}$$

Für den Fall, dass der Kosinusterm unter der Wurzel verschwindet wird der Flächeninhlat maximal:

$$0 = a\,b\,c\,d\,\cos\left(\frac{\beta+\delta}{2}\right)^2 \tag{4}$$

$$\cos(90^\circ) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\beta+\delta}{2} = 90^\circ \quad \rightarrow \quad \beta+\delta = 180^\circ \tag{5}$$

Die Bedingung, dass zwei sich gegenüberliegende Winkel im Viereck zu 180° ergänzen, erfüllt das Sehnenviereck. In diesem Fall liegen die vier Punkte $ABCD$ auf einem Kreis. Der maximale Flächeninhalt beträgt damit:

$$F = \sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)} = 2\,\sqrt{105}\,cm^2 \approx 20.4939\,cm^2 \tag{6}$$

Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Wir berechnen zunächst den Umkreisradius des Sehnevierecks $ABCD$:

$$r_u = \frac{1}{4\,F}\,\sqrt{(ab+cd)\,(ac+bd)\,(ad+bc)} \tag{7}$$

An Stelle von F schreiben wir die Flächenformel (6) und erhalten:

$$r_u = \frac{1}{4}\,\sqrt{\frac{(ab+cd)\,(ac+bd)\,(ad+bc)}{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6721}{105}} \approx 4.0003cm \tag{8}$$

Mit der Kenntnis vom Umkreisradius sieht die Konstruktion des Sehnenvierecks wie folgt aus:

- Zeichne einen Kreis k mit dem Radius $r_u = 4\,cm$,
- markiere auf k den Punkt A,
- trage von A aus die Strecke $a = 3\,cm$ auf k ab und bezeichne den Enpunkt mit B,
- trage von B aus die Strecke $b = 4\,cm$ auf k ab und bezeichne den Endpunkt mit C,
- trage von C aus die Strecke $c = 5\,cm$ auf k ab und bezeichne den Endpunkt mit D,
- verbinde den Punkt A mit D

Das so konstruierte Sehnenviereck $ABCD$ entspricht dem gesuchten Viereck mit maximalen Flächeninhalt.