Im Fußballstadion

Dr. Wolfgang Neidhardt, UNI Bayreuth

3. April 2001

Ein Zuschauer Z sucht im Fußballstadion auf der Tribüne den optimalen Beobachterplatz, für den der Blickwinkel β auf das Tor am größten ist. Das Tor habe eine Breite von $b = 10\,m$. Die erste Tribünensitzplatzreiche sei $a = 30\,m$ vertikal vom linken Torpfosten P_1 entfernt (siehe Bild 1). Die horizontale Entfernung zwischen Torlinie und Zuschauer sei mit x bezeichnet.

1. Beschreiben Sie die Funktion für die Größe des Blickwinkels β in Abhängigkeit von der Entfernung x,
2. Zeichnen Sie den Funktionsverlauf $\beta(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 80\,m$,
3. Berechnen Sie die Stelle x an der β maximal wird, als algeraische Zahl (Nullstelle eines Polynoms)!

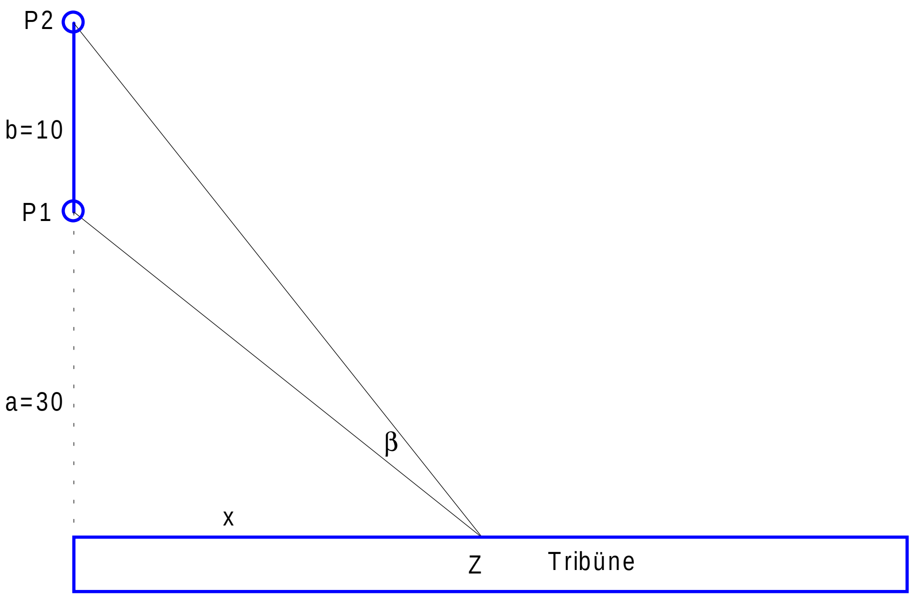

Abbildung 1: Bild zur Aufgabenstellung

Punktezahl=6

Lösung

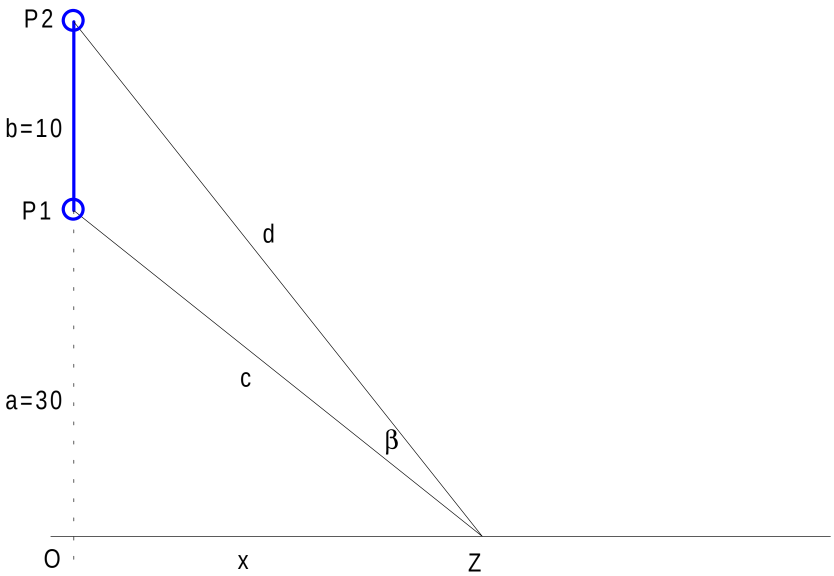

Abbildung 2: Skizze zur Lösung

Wir führen die Streckenbezeichner $c = \overline{ZP_1}$ und $d = \overline{ZP_2}$ ein. Ihre Entfernung berechnet sich aus dem *Satz des Pythagoras*:

$$c = \sqrt{x^2 + a^2}, \qquad d = \sqrt{(a+b)^2 + x^2} \tag{1}$$

Der Winkel β folgt aus dem Cosinussatz im schiefwinkligen Dreieck ZP_1P_2 :

$$b^2 = c^2 + d^2 - 2\,c\,d\cos(\beta) \quad \rightarrow \quad \cos(\beta) = \frac{c^2 + d^2 - b^2}{2\,c\,d} \tag{2}$$

Die Strecken c und d werden mit Gleichung (1) substituiert. Um den Winkel β zu erhalten, wenden wir die Umkehrfunktion des Cosinus an.

$$\beta(x) = \arccos\left(\frac{a^2 + a\,b + x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}\,\sqrt{(a+b)^2 + x^2}}\right) \tag{3}$$

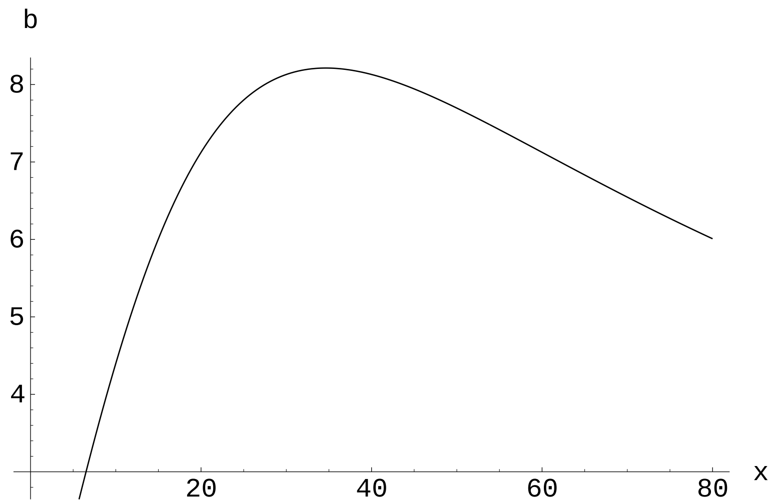

Abbildung 3: Funktion $\beta(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 80\,m$

Maximumberechnung

Der Winkel β kann im vorliegenden Fall nur auf dem Intervall $0 \leq \beta \leq 90°$ liegen. Die Funktion arccos verläuft im ersten Quadranten monoton fallend von $1 \rightarrow 0$. Damit genügt es von der Funktion :

$$y(x) = \frac{a^2 + a\,b + x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}\,\sqrt{(a+b)^2 + x^2}} \tag{4}$$

das Minimum zu bestimmen.

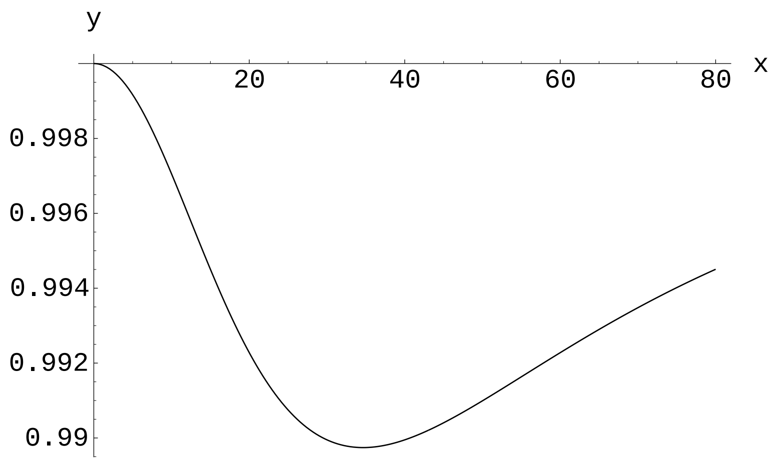

Abbildung 4: Funktion $y(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 80\,m$

Wir bilden die erste Ableitung $y'(x)$ und bestimmen die Nullstellen.

$$y'(x) = \frac{b^2 x(-a(a+b)+x^2)}{(a^2+x^2)^{3/2}\left((a+b)^2+x^2\right)^{3/2}} \tag{5}$$

$$y'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x_{01} = 0, \quad x_{02} = -\sqrt{a^2+a\,b}, \quad x_{03} = \sqrt{a^2+a\,b} \tag{6}$$

Aus Abbildung 3 ist ersichtlich, dass das Minimum bei $x > 0$ liegt, also ist $x_{min} = x_{03}$. Für y_{min} erhalten wir:

$$x_{min} = \sqrt{a^2+a\,b} \quad \rightarrow \quad y_{min} = \frac{2a(a+b)}{\sqrt{a(2a+b)}\sqrt{a^2+ab+(a+b)^2}} \tag{7}$$

Mit den numerischen Werte aus der Aufgabenstellung folgt:

$$a = 30, \quad b = 10 \quad \rightarrow \quad x_{min} = 20\sqrt{3}, \quad y_{min} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \tag{8}$$

$$\beta_{max} = \arccos(y_{min}) = \arccos\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) = 8.21321^\circ \tag{9}$$