Minimale Flächen

Ingmar Rubin, Berlin

2. April 2002

Ein Draht der Länge $L = 1\,m$ soll in zwei Stücke x, y geteilt werden. Aus den Teilstücken soll ein Kreis k mit Radius r und eine Ellipse e mit den Halbachsen a, b geformt werden. Für das Verhältnis der Ellipsenhalbachsen gilt $a = 2\,b$.

In welchem Verhältnis muss der Draht geteilt werden, damit die Kreisfläche plus Ellipsenfläche minimal werden ?

Punktezahl = 6

Lösungsweg

Der Draht mit Länge L setzb sich laut Aufgabenstellugn aus den Teilstrecken x, y zusammen:

$$L = x + y \tag{1}$$

Aus dem Teilstück x werde der Kreis k geformt. Der Kreisumpfang entspricht damit der Länge x:

$$x = 2\,\pi\,r \quad \rightarrow \quad r = \frac{x}{2\,\pi} \quad \rightarrow \quad A_k = \pi\,r^2 = \frac{x^2}{4\,\pi} \tag{2}$$

Variable x wird mit Hilfe von (1) durch y ersetzt:

$$A_k = \frac{(L-y)^2}{4\,\pi} \tag{3}$$

Die Ellipse mit den Halbachsen a, b hat die Parameterdarstellung :

$$u(t) = a\cos(t) = 2\,b\cos(t), \qquad v(t) = b\sin(t) \tag{4}$$

Das Teilstück y entsprcht dem Umfang der Ellipse:

$$y = \int\limits_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}\,dt = \int\limits_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{4\,b^2\sin(t)^2 + b^2\cos(t)^2} \tag{5}$$

Das Integral (4) kann weiter vereinfacht werden, da $\sin(t)^2 + \cos(t)^2 = 1$ ist.

$$y = b \int\limits_{t=0}^{t=2\pi} \sqrt{3\sin(t)^2 + 1} = 4\,b\,\mathrm{EllipticE}[-3] \quad \rightarrow \quad b = \frac{y}{4\,\mathrm{EllipticE}[-3]} \tag{6}$$

Mit anderen Worten ist der Ellipsenumfang y eine lineare Funktion in b. Der Funktionswert EllipticE$[-3]$ bedeutet das Elliptische Integral 1.Gattung an der Stelle -3. Die Ellipsenfläche beträgt :

$$A_e = \pi\,a\,b = 2\,\pi\,b^2 = \frac{\pi\,y^2}{8\,\mathrm{EllipticE}[-3]^2} \tag{7}$$

Jetzt können wir die Gesamtfläche A in Abhängigkeit von y definieren:

$$A(y) = A_k + A_e = \frac{(L-y)^2}{4\,\pi} + \frac{\pi\,y^2}{8\,\mathrm{EllipticE}[-3]^2} \tag{8}$$

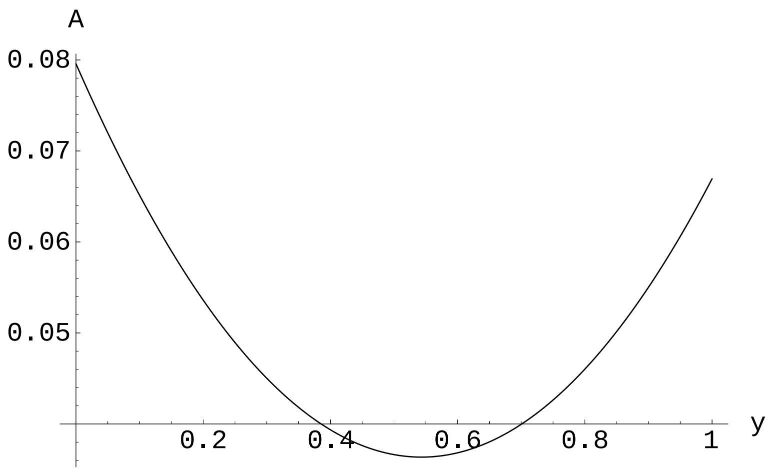

Abbildung 1: Funktionsverlauf $A(y)$ im Intervall $0 \leq y \leq L$

Über die Nullstelle der 1. Ableitung bestimmen wir die Extremstelle:

$$A'(y) = -\frac{L-y}{2\,\pi} + \frac{\pi\, y}{4\,\text{EllipticE}[-3]^2} \tag{9}$$

$$A'(y) = 0 \quad \rightarrow \quad y_0 = \frac{2\,L\,\text{EllipticE}[-3]^2}{\pi^2 + 2\,\text{EllipticE}[-3]^2} \approx 0.543134 \tag{10}$$

Mit Hilfe der zweiten Ableitung wird die Art des Extremums bestimmt:

$$A''(y) = \frac{1}{2\,\pi} + \frac{\pi}{4\,\text{EllipticE}[-3]^2} \approx 0.293031 \tag{11}$$

Damit besitzt die Funktion $A(y)$ an der Stelle $y_0 \approx 0.543134$ ein lokales Minimum. Das Verhältnis der Teilstrecken beträgt:

$$w = \frac{x}{y_0} = \frac{L - y_0}{y_0} = \frac{(\pi^2 + 2\,\text{EllipticE}[-3]^2)\,(1 - \frac{2\,\text{EllipticE}[-3]^2}{\pi^2 + 2\,\text{EllipticE}[-3]^2})}{2\,\text{EllipticE}[-3]^2} \tag{12}$$

Nach Vereinfachung erhält man:

$$w = \frac{\pi^2}{2\,\text{EllipticE}[-3]^2} = 0.841165 \tag{13}$$