Aufgabe λ 34

Dr.Roland Mildner, Leipzig

Zeitschrift *Die Wurzel*, Heft 7/04

Ein bojenähnlicher Körper möge zusammengesetzt sein aus einem geraden Kreiszylinder (Durchmesser d, Höhe H, einem oben aufgesetzten geraden Kreiskegel (Grunddurchmesser d, Höhe h) und einer unten aufgesetzten Halbkugel (Durchmesser d), siehe Abbildung 1.

Wie sind die Abmessungen d, h und H zu wählen, damit der Körper bei gegebenem Volumen V eine möglichst kleine Oberfläche hat?

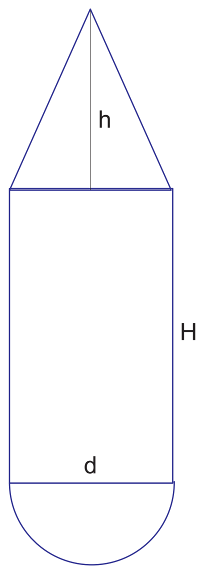

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

Lösungsvorschlag

von Ingmar Rubin, Berlin

Ohne Herleitung seien die Formeln zur Berechnung der Oberfläche und des Volumens der drei Grundkörper Kreiskegel, Zylinder und Halbkugel als gegeben vorausgesetzt. Zu beachten ist, dass vom Kreiskegel nur der äußere Kegelmantel betrachtet werden darf. Die Grundfläche des Kegels tritt nicht nach außen in Erscheinung. Gleiches gilt für die Grundfläche / Deckfläche vom Zylinder und der Grundfläche der Halbkugel. Die Oberfläche des Körpers berechnet sich demnach zu:

$$A_O(d,h,H) = \pi\, d\, H + \frac{\pi\, d^2}{2} + \frac{\pi\, d\sqrt{d^2+4\,h^2}}{4} \tag{1}$$

Das Volumen beträgt:

$$V = \frac{\pi\, d^2\, H}{4} + \frac{\pi\, d^3}{12} + \frac{\pi\, d^2\, h}{12} \tag{2}$$

Es handelt sich um eine Extremwertaufgabe mit drei Veränderlichen und einer Nebenbedingung. Nach *Lagrange* wird die Nebenbedingung mittels einem *lagrangschen Multiplikator* in die zu minimierende Oberflächenformel einbezogen. Die Nebenbedingung muß dazu als implizite Funktion dargestellt werden:

$$\varphi(d,H,h) = V - \frac{\pi\, d^2\, H}{4} + \frac{\pi\, d^3}{12} + \frac{\pi\, d^2\, h}{12} \tag{3}$$

Die *Lagrange-Funktion* L sieht damit wie folgt aus:

$$L(d,H,h,\lambda) = A_O(d,H,h) + \lambda \cdot \varphi(d,H,h) \tag{4}$$

Die Extremstellen werden aus der Lösung des folgenden Gleichungssystem bestimmt:

$$\frac{\partial L}{\partial d} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial H} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial h} = 0, \qquad \varphi(d,H,h) = 0 \tag{5}$$

Bei der Bildung der partiellen Ableitungen und der Bestimmung der Nullstellen nutzen wir vorteilhaft ein *Computeralgebrasystem* wie *Mathematica*.

$$\frac{\partial L}{\partial d} = \frac{1}{12}\,\pi\left(12\,d + \frac{3\,d^2}{\sqrt{d^2+4\,h^2}} + 3\sqrt{d^2+4\,h^2} + 12\,H - d\,(3\,d + 2\,h + 6\,H)\,\lambda\right) \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial H} = -\frac{1}{4}\,d\,\pi\,(-4 + d\,\lambda) \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \frac{d\,h\,\pi}{\sqrt{d^2+4\,h^2}} - \frac{1}{12}\,d^2\,\pi\,\lambda \tag{8}$$

Die Auflösung von (5) ergibt fünf Tupel H, h, d, λ, wobei Vier von ihnen im Bereich der komplexen Zahlen liegen, und als Lösung für die Aufgabenstellung nicht in Betracht kommen.

Das Minimum der Oberfläche wird für das folgende Lösungstripel H, h, d eingenommen:

$$H = \frac{\sqrt[3]{\frac{3\,(-2\,V+\sqrt{5}\,V)}{\pi}}}{\sqrt{5}} \tag{9}$$

$$h = \frac{2\,\sqrt[3]{\frac{3\,(-2\,V+\sqrt{5}\,V)}{\pi}}}{\sqrt{5}} \tag{10}$$

$$d = 2\,\sqrt[3]{\frac{3\,(-2\,V+\sqrt{5}\,V)}{\pi}} \tag{11}$$

$$\lambda = 2\,\sqrt[3]{\frac{\pi}{3\,(-2\,V+\sqrt{5}\,V)}} \tag{12}$$

Für eine Boje mit einem Liter Fassungsvermögen erhält man als numerische Näherung:

$$V = 1000.0, \qquad A_O = 492.93 \tag{13}$$

$$H = 2.72177, \quad h = 5.44354, \quad d = 12.1721, \quad \lambda = 0.32862 \tag{14}$$