Eine Kette unendlich vieler Kreise

aus mathsoftpuzzle

Gegeben ist der Kreissektor OAB mit dem Radius $r = 1$ und dem Winkel $2 \cdot t$. Dem Kreissektor werden, von rechts beginnend, fortlaufend Kreise einbeschrieben, so daß sich eine Kette stetig verjüngender Kreise bildet. Die Radien R_i der Kreise laufen gegen Null. In Abbildung 1 sind nur die ersten drei Kreise eingezeichnet.

Für welchen Winkel t ist das Verhältnis aus der Summe aller Kreisflächeninhalte zur Fläche des Kreissktors maximal ?

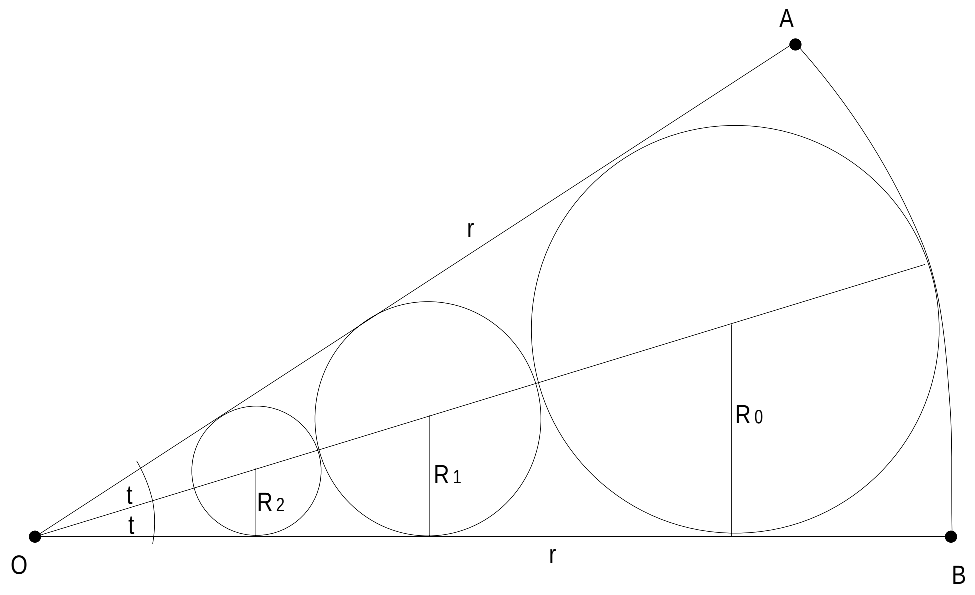

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Punktezahl: 8

Lösung

Zunächst betrachten wir das Gesetz nach dem die Kreisradien abnehmen. Der Radius R_0 berechnet sich bei gegebenen r und t nach :

$$\sin(t) = \frac{r - R_0}{R_0}, \qquad R_0 = \frac{r\sin(t)}{1+\sin(t)} \tag{1}$$

Aus dem Anstiegsdreieck zwischen dem Radius R_1 und R_0 folgt:

$$\sin(t) = \frac{R_0 - R_1}{R_0 + R_1}, \qquad R_1 = R_0 \cdot \frac{1-\sin(t)}{1+\sin(t)} \tag{2}$$

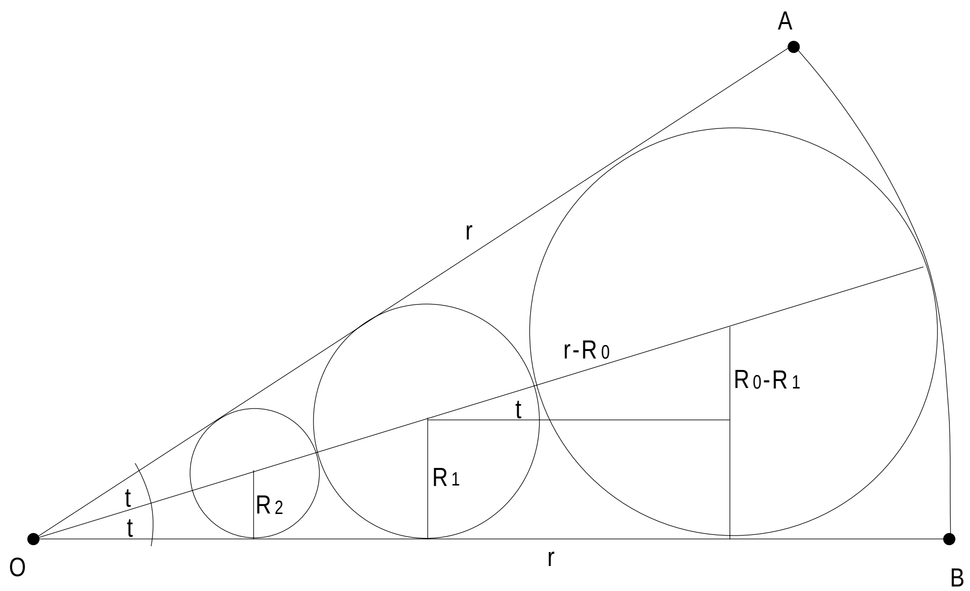

Abbildung 2: Lösungsskizze

Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Radien beträgt:

$$p = \frac{R_{i+1}}{R_i} = \frac{1-\sin(t)}{1+\sin(t)} \tag{3}$$

Die Radien nehmen nach einer geometrischen Reihe mit dem Faktor p ab. Der n-te Radius lautet:

$$R_n = R_0 \cdot \left[\frac{1-\sin(t)}{1+\sin(t)}\right]^n \tag{4}$$

Die Summe aller Kreisflächen berechnet sich aus:

$$A = \pi \cdot R_0^2 \sum_{i=0}^{i=\infty} \cdot \left[\frac{(1-\sin(t))^2}{(1+\sin(t))^2} \right]^i \tag{5}$$

Für die unendliche Summe einer geometrischen Reihe mit $q < 1$ gilt die Formel:

$$s = \frac{a_0}{1-q} \tag{6}$$

In unserem Fall gilt:

$$a_0 = \pi R_0^2 = \pi \cdot \frac{r^2 \sin(t)^2}{(1+\sin(t))^2}, \qquad q = p^2 = \frac{(1-\sin(t))^2}{(1+\sin(t))^2} \tag{7}$$

Für Winkel $0 \leq t \leq \pi$ gilt stets $q < 1$. Damit können wir die oben genannte Summenformel verwenden.

$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \sin(t)^2}{(1+\sin(t))^2 \cdot \left(1 - \frac{(1-\sin(t))^2}{(1+\sin(t))^2}\right)} \tag{8}$$

Die Formel kann nach Anwendung von Winkeltheoremen vereinfacht werden:

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot r^2 \cdot \sin(t) \tag{9}$$

Die Fläche vom Kreissektor errechnet sich aus:

$$A_k = r^2 \cdot t \tag{10}$$

Schließlich bilden wir den Quotienten aus A und A_k:

$$v = \frac{A}{A_k} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \sin(t)}{r^2 \cdot 4 \cdot t} = \frac{\pi \cdot \sin(t)}{4 \cdot t} \tag{11}$$

Gesucht ist der Winkel t für den die Funktion $v = v(t)$ ein Maximum erreicht.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi \cdot \cos(t)}{4 \cdot t} - \frac{\pi \cdot \sin(t)}{4 \cdot t^2} = 0 \tag{12}$$

Die erste Nullstelle von $v'(t)$ liegt bei $t_0 = 0$. In den Abbildungen 2 und 3 ist der Graph $v(t)$ und $v'(t)$ im Intervall $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ dargestellt. Das Maximum bei $t = 0$ beträgt :

$$v_{max}(t=0) = \lim_{t \to 0} \frac{\pi \cdot \sin(t)}{4 \cdot t} = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854 \tag{13}$$

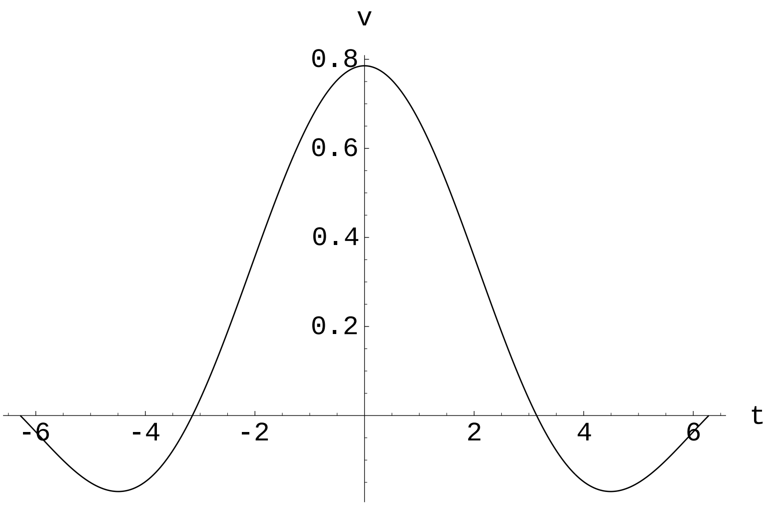

Abbildung 3: Funktion $v = v(t)$

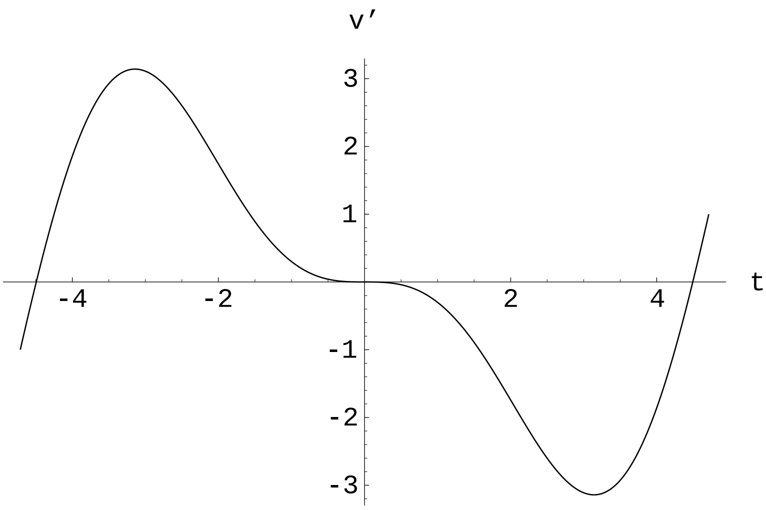

Abbildung 4: Erste Ableitung $v'(t)$