Verfolgungsprobleme

nach einer Idee von Alfons Grundl

1. Februar 2005

Ein Bauer (B) will seine Sau (S) einfangen. Der Abstand zwischen Bauer und Sau beträgt am Anfang a Meter. Die Sau läuft im 90 Grad Winkel zu der Strecke Bauer - Sau mit der Geschwindigkeit v_s davon. Der Bauer folgt der Sau mit der Geschwindigkeit v_b. Dabei gilt $v_b > v_s$. Nun ist der Bauer aber nicht der Hellste und er läuft, anstatt der Sau den Weg abzuschneiden, immer genau in die Richtung in der momentan die Sau sieht.

1. Bestimme die Wegstrecke und die Zeit bis der Bauer die Sau gefangen hat durch numerische Simulation für $v_s = 0.5\,\frac{m}{s}$, $v_b = 1.0\,\frac{m}{s}$, $a = 10m$.
2. Stelle eien zeitfreie Differentialgleichung für die Verfolgungskurve auf.
3. Bestimme aus der Lösung der DGL eine Funktion $t = f(a, v_b, v_s)$, d.h. der Zeit bis der Bauer die Sau gefangen hat.

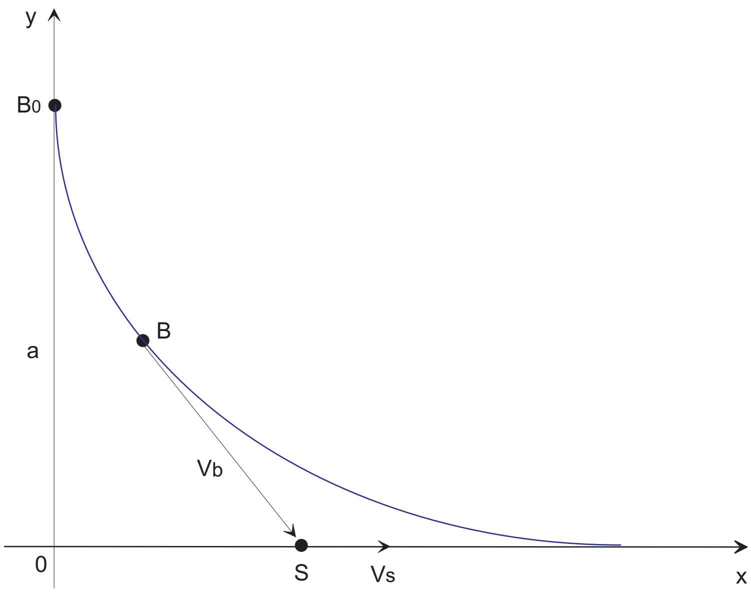

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung I

Aufgabenstellung II

Ein Bauer (B) will seine Sau (S) einfangen. Der Abstand zwischen Bauer und Sau beträgt zu Beginn a Meter. Die Sau flüchtet stets im 90 Grad Winkel zu der momentanen Verbindungslinie Bauer - Sau mit der Geschwindigkeit $v_s > 0$. Der Bauer folgt der Sau mit der Geschwindigkeit $v_b > 0$. Der Bauer verfolgt die Sau immer genau in die Richtung, in der er sie momentan sieht.
Bestimme die Wegstrecke die der Bauer laufen muß bis er die Sau hat.

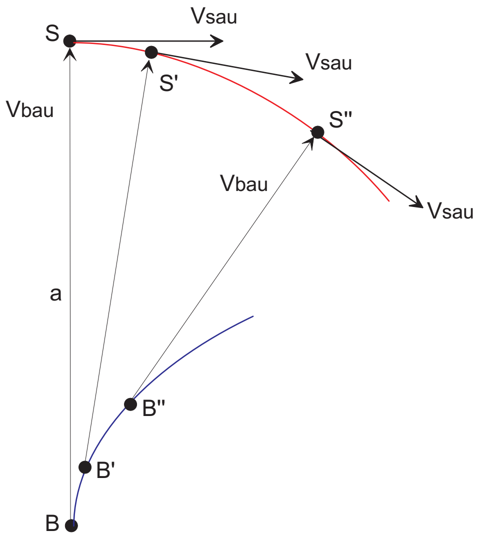

Abbildung 2: Skizze zur Aufgabenstellung II

Lösung durch numerische Integration

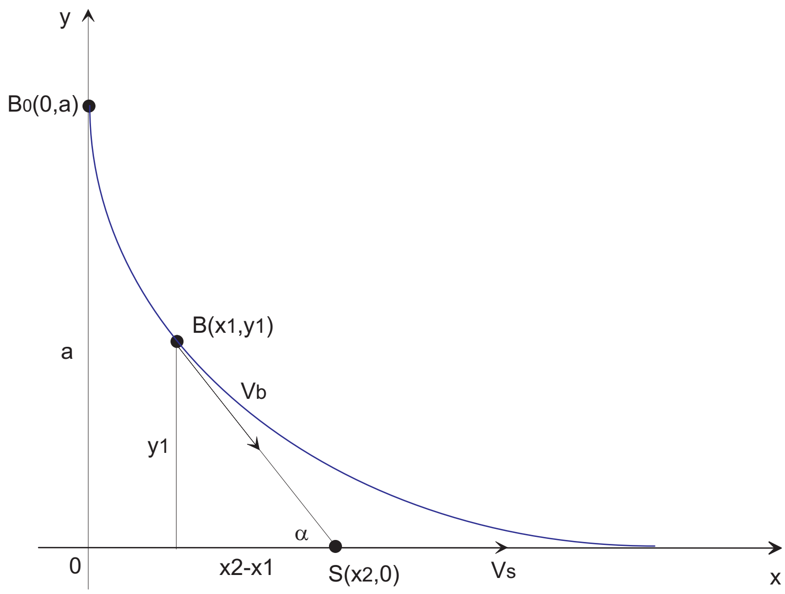

Abbildung 3: Skizze zur Lösung I

Zur Lösung des Problems legen wir die Punkte B und S in ein rechtwinklig, kartesisches Koordinatensystem. Die Koordinaten von B seien zeitabhängige Funktionen mit t als Parameter $x_1(t), y_1(t)$. Die Koordinaten x_2, y_2 von S sind nach Aufgabenstellung festgelegt, mit:

$$S: \qquad x_2(t) = v_s \cdot t, \qquad y_2(t) = 0 \tag{1}$$

Der Bauer hält stets Kurs auf S. Demzufolge zeigt die Tangente an die Bahnkurve stets in Richtung $\overline{BS}$. Der Geschwindigkeitsvektor v_b wird in seine $x-$ und $y-$ Komponente zerlegt:

$$v_x = v_b \cdot \cos\alpha = \dot{x_1}, \qquad v_y = v_b \cdot \sin\alpha = \dot{y_1} \tag{2}$$

$$\dot{x_1} = v_b \cdot \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}, \quad \dot{y_1} = v_b \cdot \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{3}$$

Die Koordinaten x_2, y_2 ersetzen wir durch (1) :

$$\dot{x_1} = v_b \cdot \frac{v_s \cdot t - x_1}{\sqrt{(v_s \cdot t - x_1)^2 + (0 - y_1)^2}}, \quad \dot{y_1} = v_b \cdot \frac{0 - y_1}{\sqrt{(v_s \cdot t - x_1)^2 + (0 - y_1)^2}} \tag{4}$$

Gleichung (4) definiert die Bahntrajektorie des Punktes $B(x_1, y_1)$. Das nichtlineare Differentialgleichungssystem wird durch numerische Integration gelöst. Als Anfangsbedingung zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt:

$$AB: \quad x_1(0) = 0, \qquad y_1(0) = a \tag{5}$$

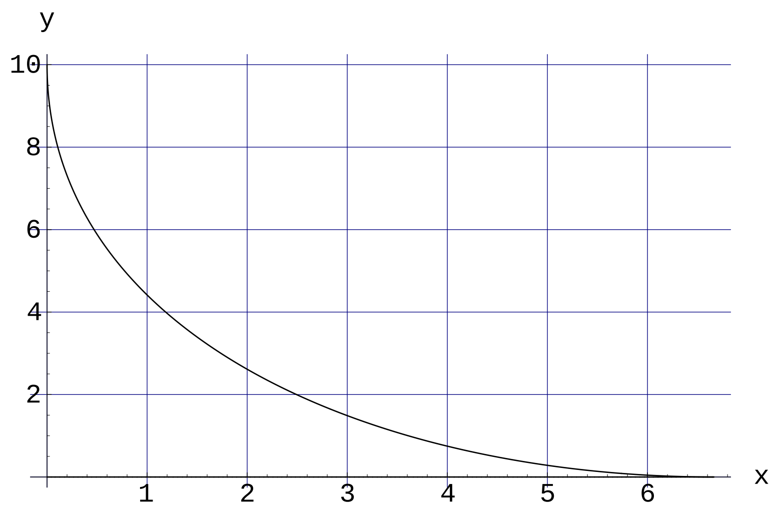

Abbildung 4: Verfolgungskurve für $v_s = 0.5\,m/s$ und $v_b = 1.0\,m/s$

Zum Zeitpunkt t_x habe der Bauer die Sau eingeholt. Dann müssen die Koordinaten von S und B identisch sein:

$$x_1(t_x) = x_2(t_x) = v_s \cdot t_x, \qquad y_1(t_x) = y_2(t_x) = a \tag{6}$$

Der Weg den der Bauer bis dahin zurück gelegt hat beträgt:

$$B: \quad s(t_x) = v_b \cdot t_x \tag{7}$$

Für $v_b = 1.0\,m/s$ und $0.1 \leq v_s \leq 0.9\,m/s$ ergeben sich folgende Werte für t_x

$v_s\ [m/s]$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$t_x\ [s]$	10.10	10.42	10.99	11.9	13.33	15.625	19.61	27.778	52.63
$s\ [m]$	10.10	10.42	10.99	11.9	13.33	15.625	19.61	27.778	52.63

Aufstellung einer zeitfreien Differentialgleichung

nach einer Idee von Artur Koehler

Der Anstieg der Kurventangente im Punkt B beträgt:

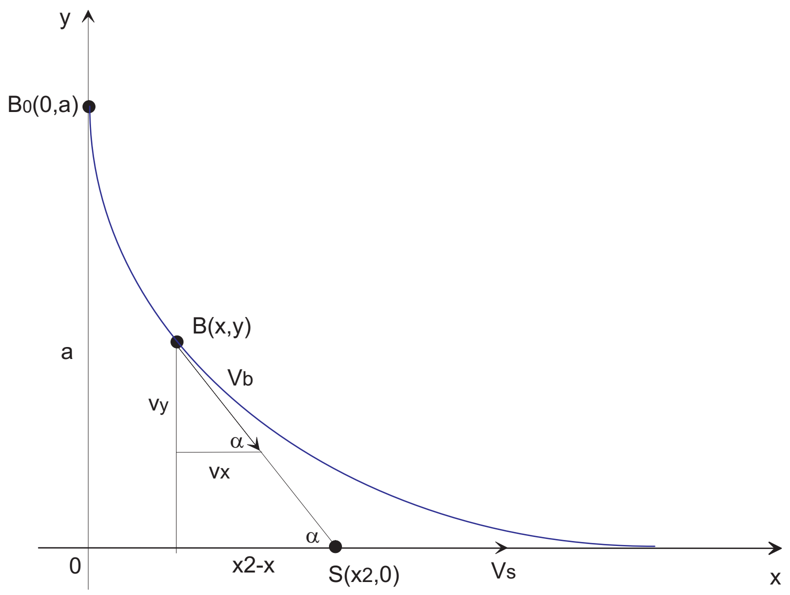

Abbildung 5: Skizze zur Verfolgungsjagt

$$y' = \frac{-y}{x_2 - x} = \frac{-y}{v_s \cdot t - x} \quad \rightarrow \quad \frac{y}{y'} = x - v_s \cdot t \tag{8}$$

Diese Gleichung leiten wir einmal nach x ab, wobei zu beachten ist, dass t von x abhängig ist!

$$\frac{y'^2 - y \cdot y''}{y'^2} = 1 - v_s \cdot \frac{dt}{dx} \tag{9}$$

Aus der geometrischen Addition der Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x} = v_x$ und $\dot{y} = v_y$ erhalten wir:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (v_b)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v_b} \tag{10}$$

Den Differentialquotienten dt/dx setzen wir in (9) ein:

$$\frac{y'^2 - y \cdot y''}{y'^2} = 1 - v_s \cdot \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v_b} \quad \rightarrow \quad y'' = \frac{v_s \cdot y'^2 \cdot \sqrt{1 + y'^2}}{v_b \cdot y} \tag{11}$$

Die Differentialgleichung (11) erlaub in dieser Form zunächst keine Integration, da die Lösungsfunktion $y = f(x)$ nicht eineindeutig ist. Wir vertauschen daher die Rolle von x

und y und substituieren wie folgt:

$$y' = \frac{1}{x'}, \qquad y'' = -\frac{x''}{x'^3} \tag{12}$$

Damit geht unsere DGL (11) über in:

$$x'' = -\frac{v_s \cdot x'^2 \cdot \sqrt{1 + x'^2}}{v_b \cdot y} \tag{13}$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$x(y) = C_2 + \frac{v_b\, y \left(v_s \cosh\left[C_1 - \frac{v_s \log[y]}{v_b}\right] + v_b \sinh\left[C_1 - \frac{v_s \log[y]}{v_b}\right]\right)}{{v_b}^2 - {v_s}^2} \tag{14}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C_1 bilden wir zunächst die erste Ableitung dx/dy :

$$x'(y) = \sinh\left[C_1 - \frac{v_s \cdot \log y}{v_b}\right] \tag{15}$$

Im Startpunkt $B_0(0, a)$ beträgt der Anstieg $dx/dy = 0$:

$$0 = \sinh\left[C_1 - \frac{v_s \cdot \log a}{v_b}\right] \quad \to \quad C_1 = \frac{v_s \cdot \log a}{v_b} \tag{16}$$

$$x(y) = C_2 + \frac{v_b\, y \left(v_s \cosh\left[\frac{v_s\,(\log[a]-\log[y])}{v_b}\right] + v_b \sinh\left[\frac{v_s\,(\log[a]-\log[y])}{v_b}\right]\right)}{{v_b}^2 - {v_s}^2} \tag{17}$$

Der Punkt $B_0(0, a)$ muß auf der Kurve liegen, woraus wir jetzt C_2 bestimmen:

$$x(a) = 0 \quad \to \quad C_2 = -\frac{a\, v_b\, v_s}{{v_b}^2 - {v_s}^2} \tag{18}$$

Wir wollen jetzt die Zeit t ermitteln bis der Bauer seine Sau gefangen hat. Ausgangspunkt ist Gleichung (4), die wir nach t auflösen:

$$\frac{y}{y'} = x - v_s \cdot t \quad \to \quad t = \frac{x(y)}{v_s} - \frac{y}{v_s} \cdot \frac{dx}{dy} \tag{19}$$

An Stelle von $x(y)$ und dx/dt setzen wir die oben ermittelten Funktionen ein:

$$t(y) = \frac{-a\, v_b + v_b\, y \cosh\left[\frac{v_s\,(\log[a]-\log[y])}{v_b}\right] + v_s\, y \sinh\left[\frac{v_s\,(\log[a]-\log[y])}{v_b}\right]}{{v_b}^2 - {v_s}^2} \tag{20}$$

An der Stelle $y = 0$ erreicht der Bauer die $x - Achse$ und fängt seine Sau. Wir berechnen den Grenzwert:

$$t_{end} = |\lim_{y \to 0} t(y)| \quad \to \quad t_{end} = \frac{a \cdot v_b}{{v_b}^2 - {v_s}^2} \tag{21}$$

Der Weg s, den der Bauer dabei zurückgelegt hat beträgt:

$$s = v_b \cdot t_{end} = \frac{a \cdot {v_b}^2}{{v_b}^2 - {v_s}^2} \tag{22}$$

Lösung der DGL für eine beliebige Anfangsbedingung

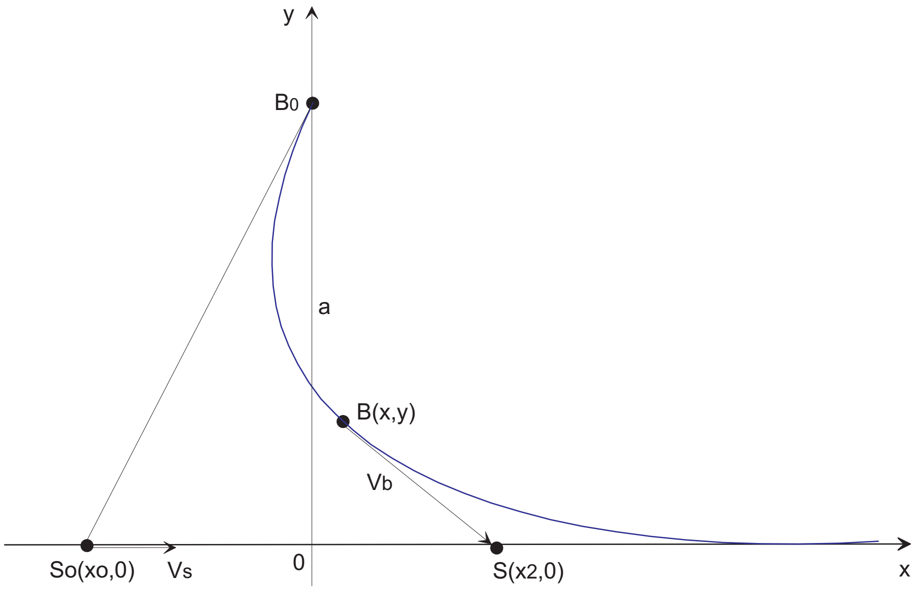

Abbildung 6: Verfolgungsproblem bei veränderter Anfangsbedingung

Im ersten Teil haben wir die DGL für den Fall gelöst, dass S senkrecht zur Verbindungslinie BS flüchtet. Diese Einschrängung wollen wir nun aufheben. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich S am Ort $S_0(x_0, 0)$ (Abbildung 6). Die Ableitung der DGL erfolgt analog. Die Bewegungsgleichung von S lautet jetzt:

$$x_2(t) = x_0 + v_s \cdot t \tag{23}$$

Der Anstieg der Kurventangente im Punkt B beträgt:

$$y' = \frac{-y}{x_2 - x} = \frac{-y}{x_0 + v_s \cdot t - x} \quad \rightarrow \quad \frac{y}{y'} = x - x_0 - v_s \cdot t \tag{24}$$

Die DGL der Verfolgungskurve und ihre allgemeine Lösung sind identisch zum ersten Fall:

$$x'' = -\frac{v_s \cdot x'^2 \cdot \sqrt{1 + x'^2}}{v_b \cdot y} \tag{25}$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$x(y) = C_2 + \frac{v_b\, y \left(v_s \cosh\left[C_1 - \frac{v_s \log[y]}{v_b}\right] + v_b \sinh\left[C_1 - \frac{v_s \log[y]}{v_b}\right]\right)}{{v_b}^2 - {v_s}^2} \tag{26}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C_1 bilden wir die erste Ableitung dx/dy :

$$x'(y) = \sinh\left[C_1 - \frac{v_s \cdot \log y}{v_b}\right] \tag{27}$$

Im Startpunkt $B_0(0, a)$ beträgt der Anstieg der Kurventangente :

$$x'(a) = \frac{-x_0}{a} = \sinh\left[C_1 - \frac{v_s \cdot \log a}{v_b}\right] \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{v_s \cdot \log a}{v_b} - arsinh\left[\frac{x_0}{a}\right] \tag{28}$$

Wir setzen das Ergebnis für C_1 in die allgemeine Lösung (26) ein. Punkt $B_0(0, a)$ liegt auf der Kurve woraus wir C_2 bestimmen:

$$x(a) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = \frac{v_b\left(v_b\, x0 - a\, v_s\sqrt{1 + \frac{x0^2}{a^2}}\right)}{{v_b}^2 - {v_s}^2} \tag{29}$$

Schließlich erhalten wir als spezielle Lösung :

$$x(y) = \frac{v_b\left(v_b\, x0 - a\, v_s\sqrt{1 + \frac{x0^2}{a^2}} + v_s\, y\, \cosh\left[\frac{v_b\, arsinh\left[\frac{x0}{a}\right] - v_s\ \log[a] + v_s\ \log[y]}{v_b}\right]\right.}{{v_b}^2 - {v_s}^2} \frac{\left.-v_b\, y\, \sinh\left[\frac{v_b\, arsinh\left[\frac{x0}{a}\right] - v_s\ \log[a] + v_s\ \log[y]}{v_b}\right]\right)}{{v_b}^2 - {v_s}^2}$$

Für den Fall $v_s = 0.9\, m/s$, $v_b = 1.0\, m/s$, $a = 10.0$ und $x_0 = -3.0$ erhält man Abb. 7

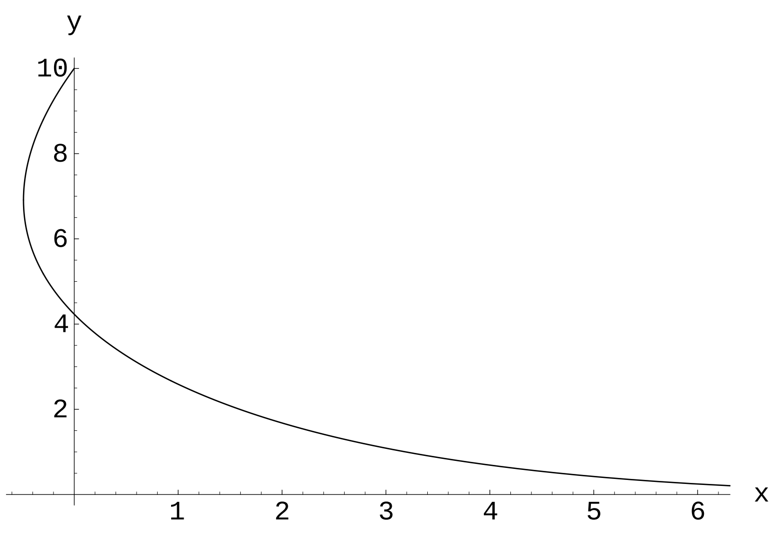

Abbildung 7: Verfolgungskurve bei veränderter Anfangsbedingung

Lösung zum Aufgabenteil II

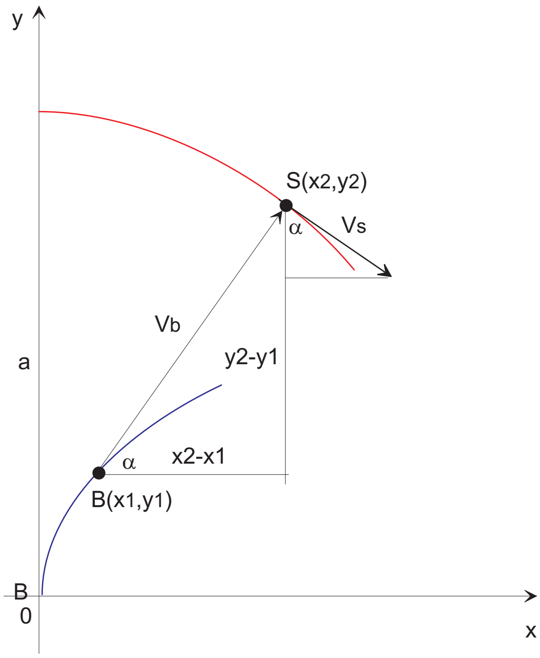

Abbildung 8: Skizze zum Lösungsweg II

Analog zur Lösung I verwenden wir ein rechtwinkliges Koordiantensystem zur Beschreibung der Bewegungsabläufe. Im Unterschied zum ersten Teil bewegt sich S jetzt auf einer Kurve die stets senkrecht zum Tangentenvektor der ersten Kurve steht. Der Tangens des Anstiegswinkels α der Kurventangente im Punkt B lautet:

$$BS = \tan\alpha = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \tag{30}$$

Der dazu senkrecht stehende Vektor besitzt den Anstieg:

$$m = -\frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{31}$$

Damit ergeben sich die Bewegungsdifferentialgleichungen zu:

$$\dot{x_1} = v_b \cdot \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}, \quad \dot{y_1} = v_b \cdot \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{32}$$

und

$$\dot{x_2} = v_s \cdot \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}, \quad \dot{y_2} = -v_s \cdot \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{33}$$

Das DGL-System wird mit den Anfangsbedingungen

$$AB: \quad x_1(0) = 0, \quad y_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad y_2(0) = a \tag{34}$$

über t integeriert. Da sich Verfolger und Verfolgte quasi aufeinander zu bewegen, genügt es wenn beide Geschwindigkeiten größer Null sind. Im Berührungsmoment gilt wieder $B = S$, d.h.

$$B = S: \quad x_1(t_x) = x_2(t_x), \quad y_1(t_x) = y_2(t_x) \tag{35}$$

Der Weg der den Bauer bis dahin gelaufen ist beträgt:

$$s = v_b \cdot t_x \tag{36}$$

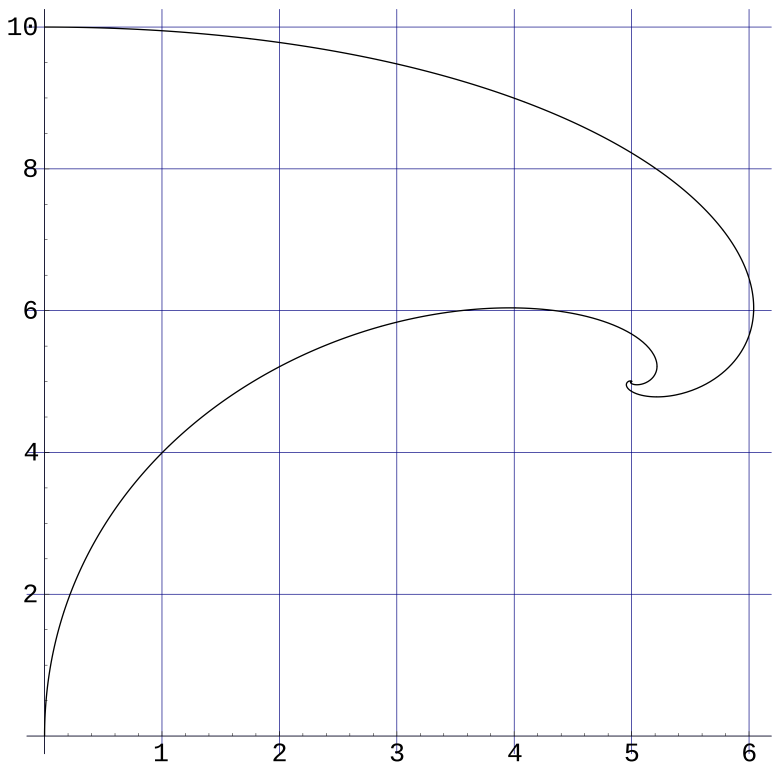

Abbildung 9: Für $v_b = v_s = 1.0\,m/s$ trefen sich B, S nach $t_x = 10.001\,s$