Im Stahlwerk

13. Mathematikwettstreit der TU-Ilmenau

11. März 1986

In einem Stahlwerk werden glühende Stahlstangen der Länge l abgebremst, indem sie einen kreisbogenförmigen Kanal der Länge $L = r \cdot \alpha > l$, durchlaufen. Die Reibung bezüglich der Erdbeschleunigung kann wegen Rollenreibung vernachlässigt werden. Der Radius r sei so groß gewählt, daß die Biegungsenergie keinen Einfluß ausüben kann.

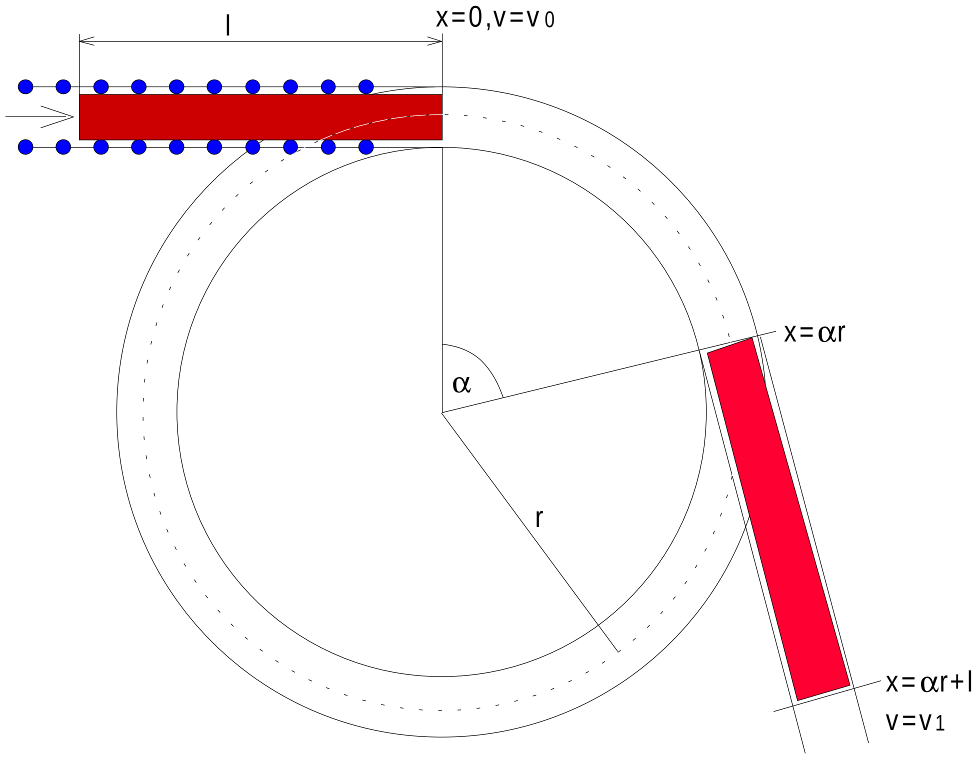

Abbildung 1: Skizze zum Stahlwerk

Es sei x der vom Anfangspunkt der Stange im Kanal zurückgelegte Weg, wobei der Ursprung $x = 0$ sich am Beginn des Kanals befindet. Die Bewegungsgleichung der Stange lautet dann:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{r} \cdot f(x) \cdot \dot{x}^2 \qquad \mu = Reibungskoeffizient \tag{1}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = v_0 \qquad v_0 \; ca. \; 30 - 50\frac{m}{s} \tag{2}$$

Die Funktion $f(x)$ ist wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(t)}{l}, & \text{falls} \quad 0 \leq x(t) \leq l \\ 1, & \text{falls} \quad l \leq x(t) \leq \alpha\, r \\ 1 - \frac{x(t) - \alpha \cdot r}{l}, & \text{falls} \quad \alpha\, r \leq x(t) \leq \alpha\, r + l \\ 0, & \text{sonst} \; . \end{cases} \tag{3}$$

1. Skizziere die Funktion $f(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq \alpha\, r + l$
2. Berechne die Geschwindigkeit v_1 des Stabes nach dem Verlassen der Bremsstrecke.
3. Welcher Winkel α ist bei $v_1 = \frac{v_0}{2}$ erforderlich, wenn der Reibungskoeffizient $\mu = 0.3$ beträgt ?

zu 1.) Skizze der Funktion $f(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq \alpha\, r + l$

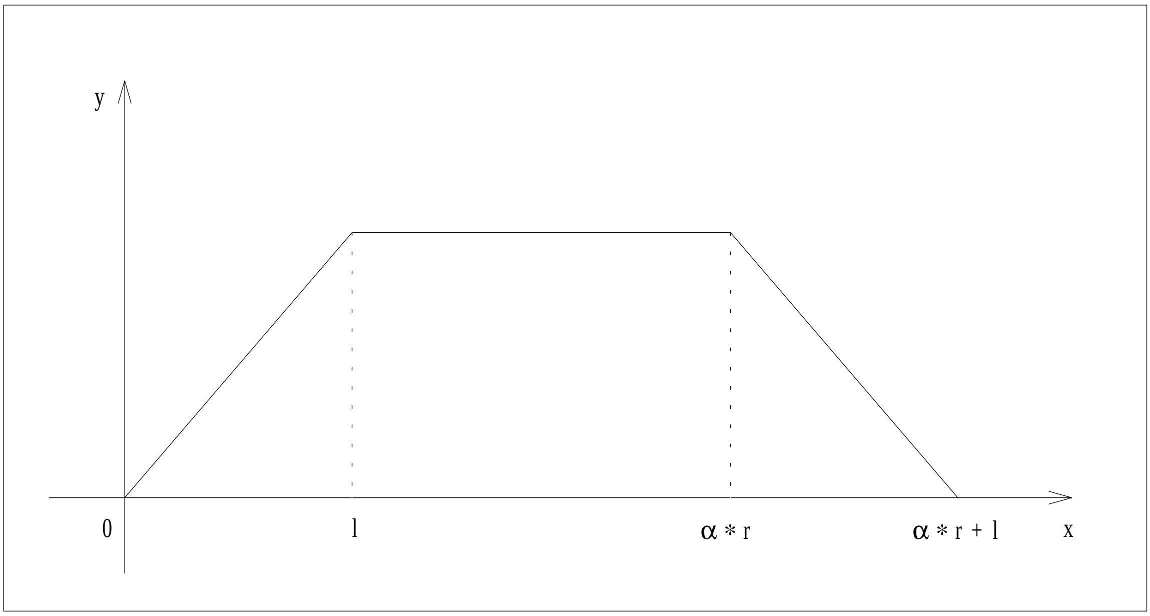

Abbildung 2: Die Funktion $f(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq \alpha\, r + l$

Integration der Differentialgleichung

Die nichtlineare DGL zweiter Ordnung kann mit dem Ansatz (4) gelöst werden:

$$\dot{x}(t) = p(x) \qquad \ddot{x}(t) = p\,\frac{dp}{dx} \tag{4}$$

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{r}\cdot f(x)\cdot \dot{x}^2 \quad \rightarrow \quad p\,\frac{dp}{dx} = -\frac{\mu}{r}\cdot f(x)\,p^2 \tag{5}$$

Durch Kürzung mit p^2 auf beiden Seiten der Gleichung geht keine Lösung verloren, da $p = 0$ die Lösung $x = C_1$ liefert, die in der allgemeine Lösung für $C = 0$ enthalten ist.

$$\int \frac{dp}{p} = -\frac{\mu}{r}\int f(x)\cdot dx \quad \rightarrow \quad \ln(p) + C = -\,\frac{\mu}{r}\int f(x)\cdot dx \tag{6}$$

$$p = \dot{x} = C'\,\exp^{-\frac{\mu}{r}\int f(x)\,dx} \qquad \dot{x}(0) = v_0 \quad \rightarrow \quad C' = v_0 \tag{7}$$

Damit haben wir eine Funktion $v = v(x)$ ermittelt:

$$v(x) = v_0\,\exp^{-\frac{\mu}{r}\int f(x)\,dx} \tag{8}$$

Endgeschwindigkeit v_1 nach Verlassen der Rollen

Am Ende der Rollstrecke beträgt $x = l + \alpha\,r$. Die zugehörige Geschwindigkeit v_1 beträgt :

$$v_1 = v(l + \alpha\,r) = v_0\,\exp^{-\frac{\mu}{r}\int\limits_0^{l+\alpha\,r} f(x)\,dx} \tag{9}$$

Das Integral über $f(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq l + \alpha\,r$ entspricht genau dem Flächeninhlat des in Abbildung 2 skizzierten Trapezes:

$$A = \int\limits_0^{l+\alpha\,r} f(x)\,dx = \frac{l}{2} + \alpha\,r - l + \frac{l}{2} = \alpha\,r \tag{10}$$

Für die Geschwindigkeit v_1 ergibt sich damit:

$$v_1 = v_0\cdot\exp^{-\alpha\cdot\mu} \tag{11}$$

Bestimmung des Winkels α

Gesucht ist der Winkel α, bei dem $v_1 = \frac{v_0}{2}$ ist, wenn der Reibungskoeffizient $\mu = 0.3$ beträgt.

$$v_1 = \frac{v_0}{2} = v_0\cdot\exp^{-\alpha\,\mu} \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\alpha\,\mu} \tag{12}$$

Für $\mu = 0.3$ folgt :

$$\alpha = \frac{\ln 2}{0.3} = 2.31 \qquad \alpha = 132.38^\circ \tag{13}$$