Untersuchung von Ausgleichsvorgängen am Personalcomputer

Ein Beitrag von Ingmar Rubin

Zusammenfassung

Ausgleichsvorgänge finden in den verschiedensten Gebieten von Natur und Technik statt. Das gesamte Wettergeschehen, die Entstehung von Luftbewegungen oder der Antrieb zahlreicher Meeresströmungen hat seine Ursachen im Temperaturausgleich zwischen kalten und warmen Luftschichten - bzw. Wassermassen.
Der Abkühlungsvorgang von einem Glas mit heißen Wasser ist Gegenstand im Physikunterricht. Zu Beginn ist die Temperaturdifferenz zwischen dem Wasserglas und der Raumtemperatur groß - entsprechend schnell findet der Temperaturausgleich (Abkühlungsvorgang) statt. Mit zunehmender Zeit sinkt die Abkühlungsgeschwindigkeit. Am Ende ist die Temperaturdifferenz sehr klein. Der Ausgleichsvorgang schreitet äußerst langsam voran - es handelt sich um eine abklingende Exponentialfunktion.
Für die Berechnung von Ausgleichsvorgängen, ist die Kenntnis von Differentialgleichungen notwendig. In einigen Leistungskursen an Gymnasien werden sie behandelt. Das von *W. Hupfeld* entwickelte Programm *DYNASIS* gestattet es beliebige Ausgleichsvorgänge am PC zu simulieren. Es wurde für mathematisch interessierte Schüler geschaffen und setzt die Kenntnis über Differentialgleichungen noch nicht voraus. Das Programm dürfte inzwischen an vielen Schulen mit Internetzugang im Einsatz sein. DYNASIS kann von der Homepage des Programmauthors als zunächst kostenfreies Sharewareprogramm geladen werden:

`http://www.schulen.hamm.de/projekte/modsim/`

An Hoschschulen und Universitäten hat sich das Programm *MATLAB* mit der Toolbox SIMULINK durchgesetzt. Auf der Homepage von Scientific Computers sind Beispiele aufgezeigt:

`http://www.scientific.de/`

Als kostenfreie Alternative zur Simulation von Differentialgleichungssystemen eignet sich auch das Programm *SCILAB*:

`http://www-rocq.inria.fr/scilab/`

Zur Lösung des folgenden Problems sollte man unbedingt eines der aufgeführten PC-Programme benutzen - insbesondere die graphische Ausgabe der Lösungskurven dürfte anders kaum möglich sein.

1 Aufgabenstellung

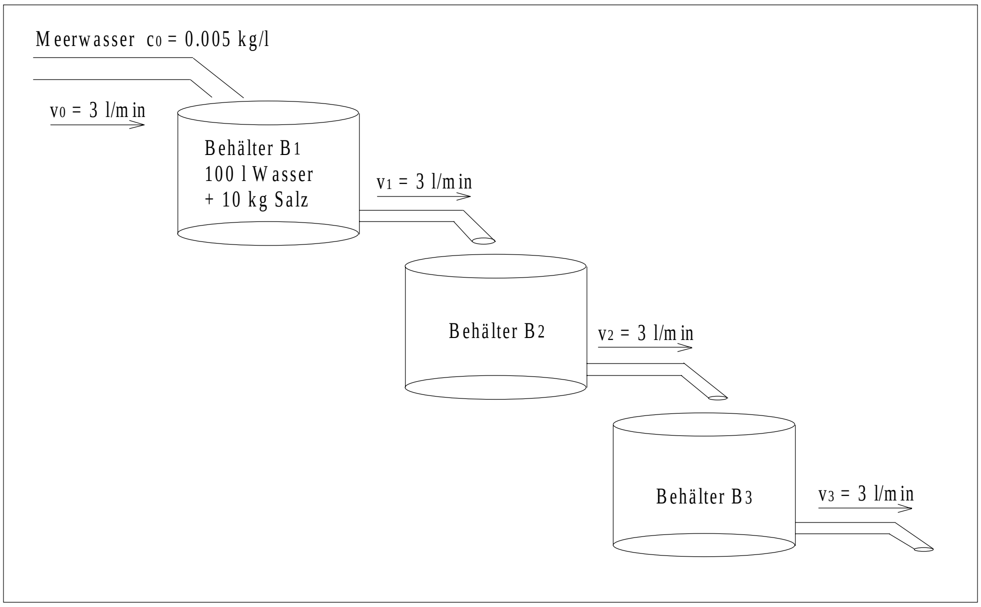


Abbildung 1.1: Kaskade aus den drei Flüssigkeitsbehältern

Gegeben ist eine Kaskade aus drei Flüssigkeitsbehältern mit je 100 Liter Fassungsvermögen (Bild 1.1). Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich im Behälter $B_1 = 100\,l$ Wasser in dem $10\,kg$ Kochsalz gelöst sind. In den Behältern B_2 und B_3 befinden sich je 100 Liter reines Leitungswasser.
In den Behälter B_1 fließt pro Minute 3 Liter Meerwasser der Salzkonzentration $c_0 = 0.005\,kg/l$ ein. Ebenso viel Wasser fließt je Minute vom Behälter B_1 in den Behälter B_2 und von dort in den Behälter B_3.
Der Abfluß vom Behälter B_3 wird in ein Sammelbecken geleitet. Durch den überlauf vom Behälter B_1 gelangt salzhaltiges Wasser in die nachfolgenden Behälter.
Ein Rührwerk sorgt in jedem Behälter für eine gleichmäßige Konzentrationsverteilung.

1. Gesucht ist für alle drei Behälter die gelöste Salzmenge als Funktion über der Zeit !
2. Bestimme den Zeitpunkt $t2_{max}$ an dem die Salzkonzentration im Behälter B_2 maximal wird ! Wie groß ist die Salzmenge in diesem Moment im Behälter B_2 ?
3. Bestimme den Zeitpunkt $t3_{max}$ an dem die Salzkonzentration im Behälter B_3 maximal wird ! Wie groß ist die Salzmenge zu diesem Zeitpunkt im Behälter B_3 ?
4. Untersuchen Sie den Ausgleichsvorgang für den Fall, das in den Behälter B_1 kein Meerwasser sondernd Leitungswasser mit der Salzkonzentration $c_0 = 0\,kg/l$ einfließt !

Punktezahl:10

2 Lösung mit DYNASIS

2.1 Simulation für Behälter B_1

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

- Vol_1, Vol_2, Vol_3 : konstantes Volumen der Behälter B_1, B_2, B_3 ,
- m_1, m_2, m_3 : Salzmenge in den Behältern B_1, B_2, B_3
  Startbedingung: $m_1(0) = 10$, $m_2(0) = 0$, $m_3(0) = 0$,
- c_0 : Salzkonzentration vom zufließenden Meerwasser $c_0 = 0.005kg/l$
- c_1, c_2, c_3: Salzkonzentrationen in den Behältern B_1, B_2, B_3,
- v_1, v_2, v_3: konstante Abflußgeschwindigkeit aus den Behälten
  $v = 3\,l/min$

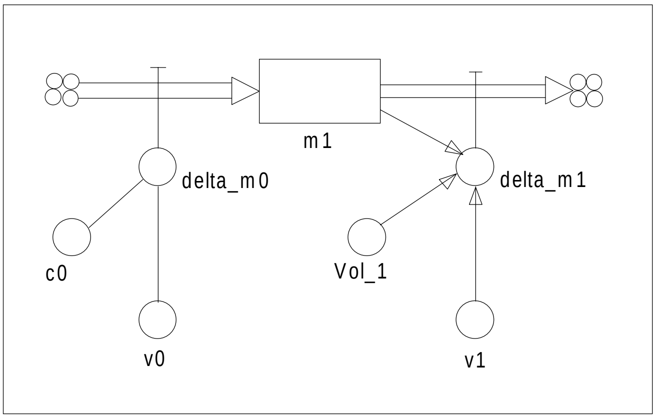


Abbildung 2.1: DYNASIS Modell für die Salzmenge m_1 im Behälter B_1

Für die Ableitung der Modellgleichungen denkt man sich die Salzmengen in den Behältern für einen kurzen Zeitmoment Δt als konstant. Wir beginnen mit dem Behälter B_1. über das Zulaufventil links vom Behälter gelangt im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ ein bestimmtes Volumen ΔV_0 vom Meerwasser in den Behälter. Mit Hilfe der Konzentration c_0 des Meerwassers kann aus dem Volumenelement ΔV_0 die zufließende Salzmenge Δm_0 berechnet werden:

$$\Delta V_0 = v_0 \cdot \Delta t \quad \rightarrow \quad \Delta m_0 = \Delta V_0 \cdot c_0 = v_0 \cdot \Delta t \cdot c_0 \tag{2.1}$$

Mit einem Doppelklick auf das Ventil $delta_{m0}$ öffnet sich das Formeleingabefenster. In DYNASIS wird der Faktor Δt vom Programm intern automatisch eingefügt, weshalb wir die Gleichung ohne Δt eingeben:

$$delta_{m0} = v_0 \cdot c_0 \tag{2.2}$$

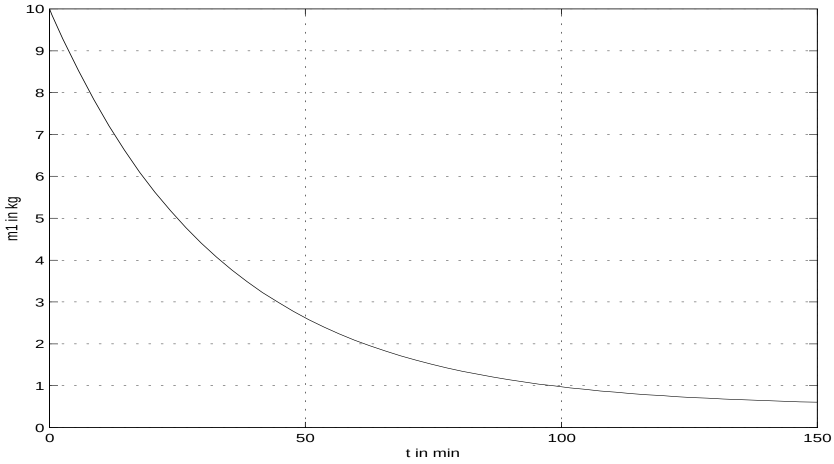


Abbildung 2.2: Salzmenge $m_1(t)$ im Behälter B_1

Auf der rechte Seite fließt Salzwasser über das Ablaufventil der Menge ΔV_1 aus dem Behälter1 ab. Damit geht dem Behälter fortlaufend Salz der Menge Δm_1 verloren.

$$\Delta V_1 = v_1 \cdot \Delta t \quad \rightarrow \quad \Delta m_1 = \Delta V_1 \cdot c_1 \tag{2.3}$$

Die aktuelle Salzkonzentration c_1 im Behälter B_1 ergibt sich aus:

$$c_1 = \frac{m_1}{Vol_1} \tag{2.4}$$

Für das Abflußventil gilt die Gleichung:

$$\Delta m_1 = v_1 \cdot c_1 = v_1 \cdot \frac{m_1}{Vol_1} \tag{2.5}$$

Nach soviel Theorie wollen wir jetzt DYNASIS starten, um den Verlauf der Salzmenge $m_1(t)$ zu berechnen. Zunächst geben wir das Modell so wie im Bild 2.1 dargestellt ein. Durch ein Doppelklick auf das entsprechende Symbol können wir den richtigen Bezeichner eintragen. Allen Variablen und Konstanten muß ein numerischer Wert zugewiesen werden. In den Ventilen $delta_{m0}$ und $delta_{m1}$ müssen die oben abgeleiteten Formeln eingetragen werden.

Im Menüpunkt Ausgabe wählen wir das Zeitdiagramm (F5). Nun müssen die Plotvariablen bestimmt werden - wir wählen m_1 aus. Mit F3 starten wir die Simulation. Wenige Sekunden später erhalten wir die folgende Graphik.
Die Salzmenge $m_1(t)$ nimmt nach einer Exponentialfunktion ab. Für $t \rightarrow \infty$ beträgt $m_1 = c_0 \cdot Vol_1 = 0.5\,kg$, d.h. die Konzentration im Behälter B_1 hat sich dem des Meerwassers angeglichen.

2.2 Behälter B_2 und B_3

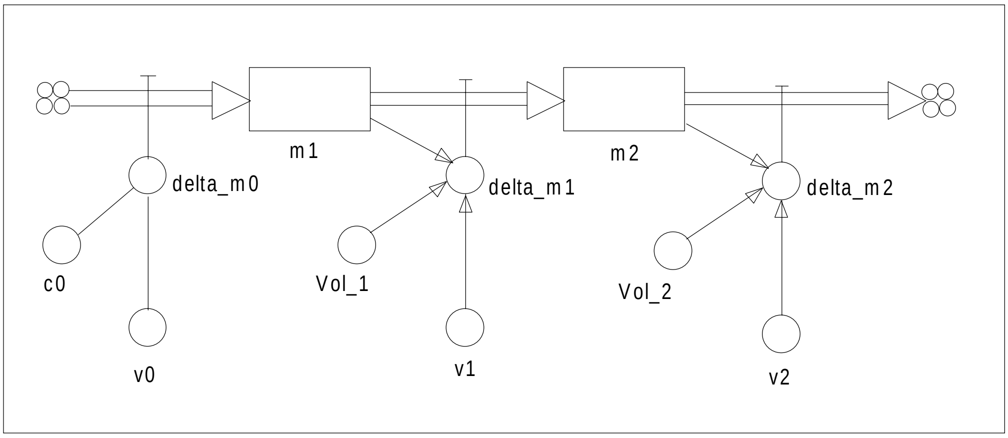


Abbildung 2.3: DYNASIS Modell für die Simulation mit zwei Behältern

Jetzt können wir das Modell erweitern auf Behälter B_2 und Behälter B_3. Für das Ventil $delta_{m0}$ und $delta_{m1}$ gelten die Gleichungen (2) und (5). Die Betrachtung für das Ventil $delta_{m2}$ sind analog wie bei $delta_{m1}$. Je Zeiteinheit Δt fließt das Volumenelement ΔV_2 ab. In dem Volumenelement ist die Salzmenge Δm_2 enthalten.

$$\Delta V_2 = v_2 \cdot \Delta t \quad \rightarrow \quad \Delta m_2 = \Delta V_2 \cdot c_2 = v_2 \cdot \Delta t \cdot \frac{m_2}{Vol_2} \tag{2.6}$$

$$delta_{m2} = v_2 \cdot \frac{m_2}{Vol_2} \tag{2.7}$$

Als Startwert für m_2 muß Null eingegeben werden, da der Behälter zu Beginn mit Leitungswasser gefüllt ist. Bei der Simulation lassen wir uns die Kurven für m_1 und m_2 ausgeben. Die Salzmenge m_2 nimmt zunächst zu, da konzentriertes Salzwasser aus dem Behälter B_1 einfließt. Nach $t2_{max} = 35\,min$ ist das Maximum erreicht. In dem Behälter befinden sich dann $3.8\,kg$ Salz. Danach gleicht sich die Konzentration im Behälter B_2 dem des Meerwassers an - ähnlich wie bei dem Behälter B_1.
Um das Maximum der Funktion $m_2(t)$ besser ablesen zu können, wählen wir über F4 das Menü Numerik. Wir reduzieren die Endzeit der Simulation auf $50\,min$. Anschließend lassen wir nur m_2 als Plotvariable zu (Taste F5) und starten die Simulation mit F3 erneut.

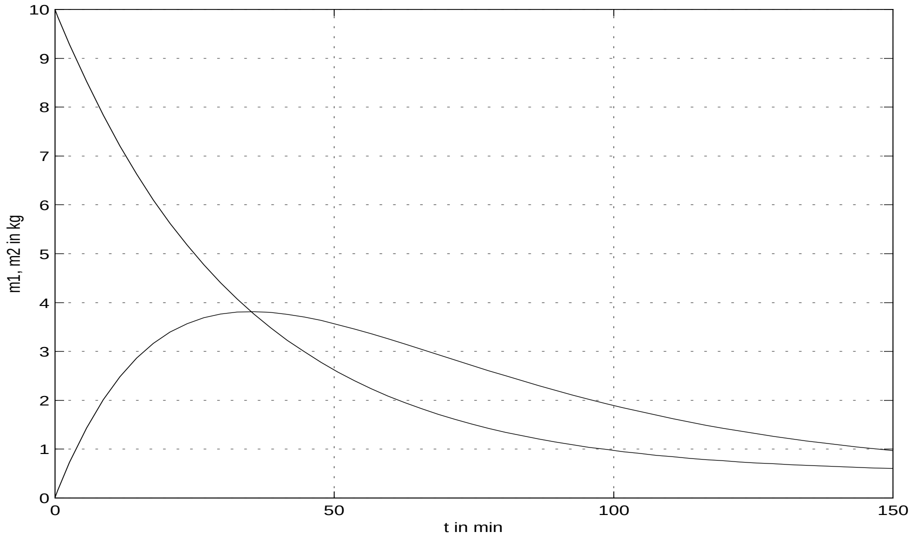


Abbildung 2.4: Salzmenge $m_1(t)$ und $m_2(t)$

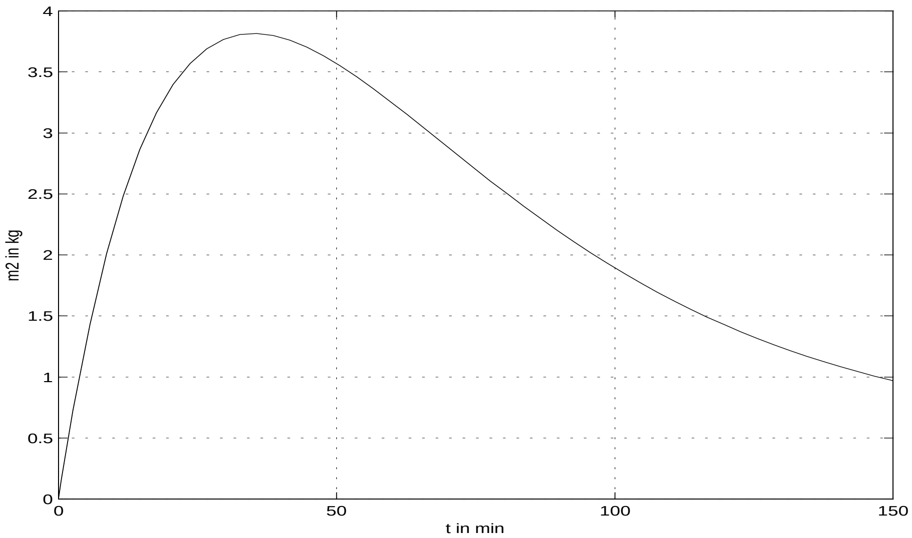
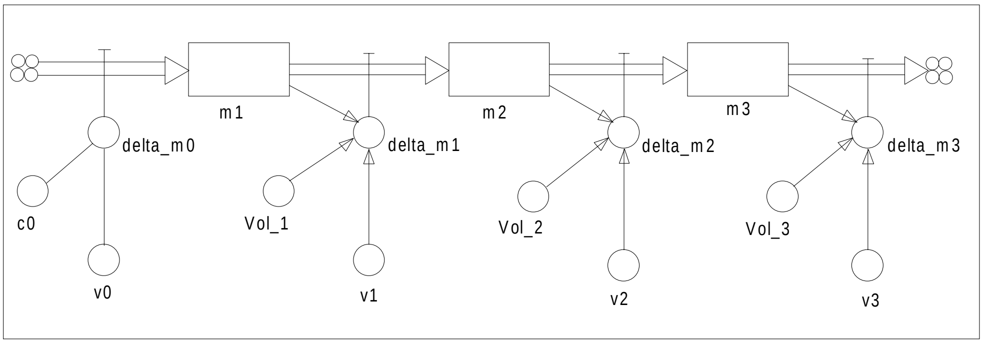


Abbildung 2.5: Das Maximum im Behälter B_2 ist nach 35 min erreicht

2.3 Simulation für alle drei Behälter

Zum Abschluß erweitern wir das Modell auf alle drei Behälter.



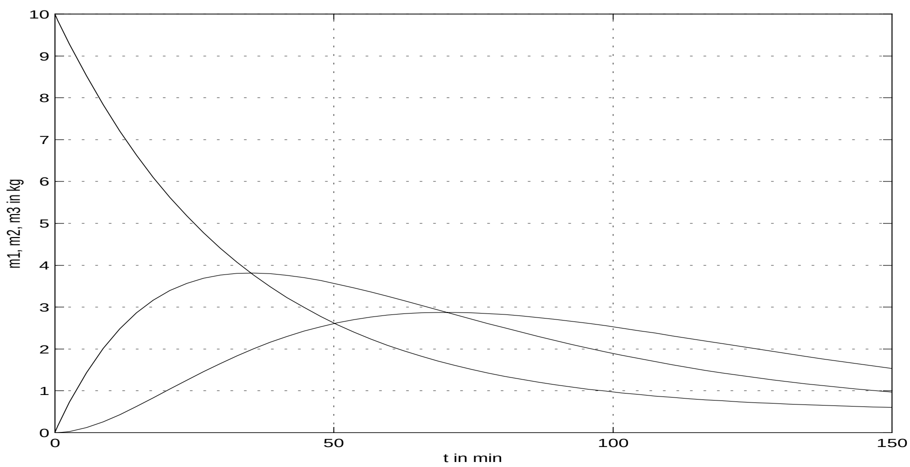


Abbildung 2.7: Verlauf der Salzmenge im Behälter $B_1 \ldots B_3$ über der Zeit

Für das Ventil $delta_{m3}$ gilt:

$$\Delta V_3 = v_3 \cdot \Delta t \quad \rightarrow \quad \Delta m_3 = \Delta V_3 \cdot c_3 = v_3 \cdot \Delta t \cdot \frac{m_3}{Vol_3} \tag{2.8}$$

$$delta_{m3} = v_3 \cdot \frac{m_3}{Vol_3} \tag{2.9}$$

Das Maximum im Behälter B_3 stellt sich nach $t3_{max} = 70\,min$ ein. Die maximale Menge beträgt zu diesem Zeitpunkt $m3_{max} = 2.88\,kg$.

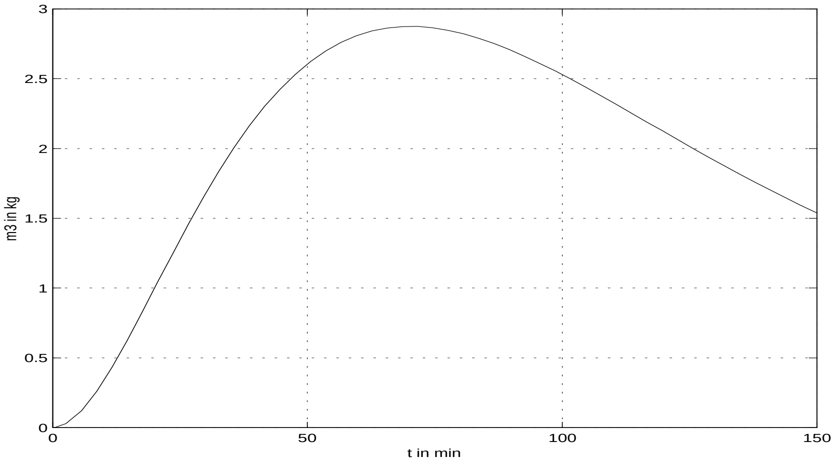


Abbildung 2.8: Im Behälter B_3 wird nach $t = 70\,min$ die maximale Salzmenge erreicht

2.4 Lösung bei Zufluß von Leitungswasser

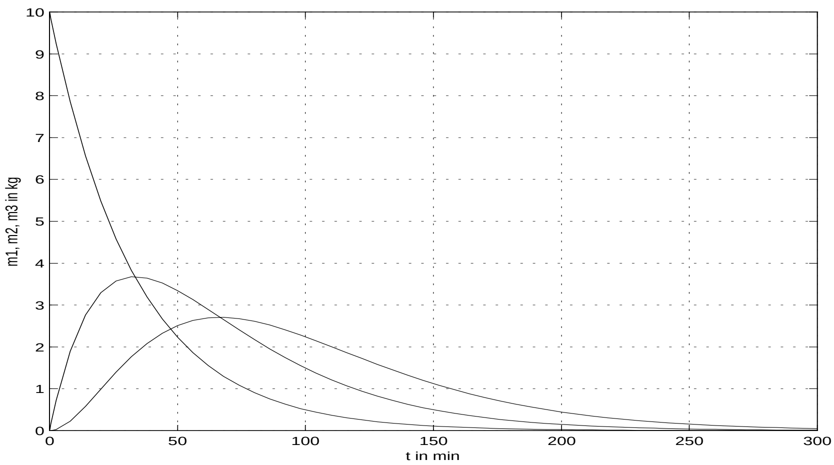


Abbildung 2.9: Salzkonzentration bei Zufluß von Leitungswasser

Um einen weiteren Einblick in den Ausgleichsvorgang zu gewinnen, können an dem Modell nacheinander verschiedene Werte geändert werden. Wird z.B. $c_0 = 0$ gesetzt, erhalten wir die Antwort auf die 4. Frage der Eingangs gestellten Aufgabe. Bei Zufluß von Leitungswasser gleicht sich die Salzkonzentration nach 6 Stunden in allen drei Behältern dem Wert Null an.

3 Matlab und Simulink

Um den Ausgleichsvorgang der drei Salzbehälter in MatLab zu simulieren ruft man *Simulink* von der Kommandozeile auf. Anschließend erstellt man das Blockschaltbild nach Abbildung 3.1 über den Menüpunkt Simulation / Parameter gibt man Startzeit $t_0 = 0$ und Endzeit $t_1 = 150$ ein. Im Menüpunkt Simulation /Start wird die Berechnung aktiviert. Nach Ende der Simulation kann man sich die Vektoren $m_1(t) \ldots m_3(t)$ wie folgt anzeigen lassen.

Eingabe im MatLab Kommandofenster:

```
plot(t,m1,t,m2,t,m3)
```

Innerhalb des Graphikfensters können mit Hilfe der Maus beliebige Abschnitte vergrößert werden.

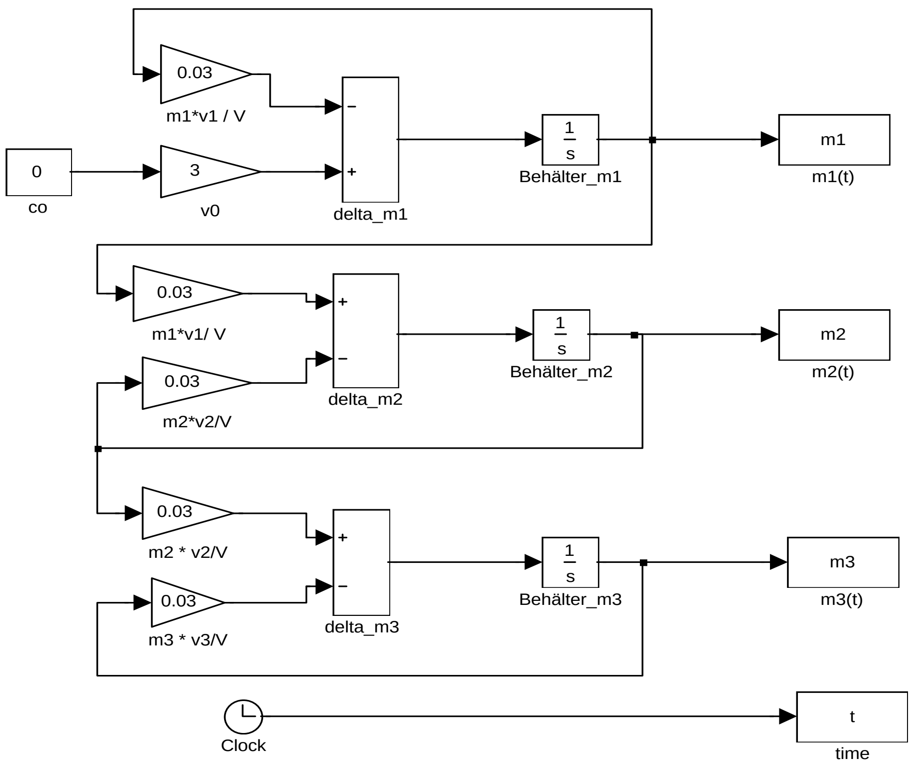


Abbildung 3.1: Blockschaltnild in Matlab/Simulink

4 Analytische Lösung

4.1 Differentialgleichungssystem

Aus den vorangegangen überlegungen können jetzt die Differentialgleichungen für die änderungsgeschwindigkeiten der Salzmengen dm_1/dt, dm_2/dt und dm_3/dt aufgestellt werden.

Die Massenänderung in den Behältern $B_1 \ldots B_3$ ergibt sich aus der Differenz der zufließenden und abfließenden Salzmenge im Zeitmoment Δt. Durch Grenzübergang werden aus dem endlich großen Delta-Werten unendlich kleine Differentiale. Da die Geschwindigkeiten $v_0 \ldots v_3$ gleich groß sind, schreiben wir einheitlich v in den Differentialgleichungen. Ebenso notieren wir für die Volumina $Vol_1 \ldots Vol_3$ einheitlich V. Damit vereinfachen sich die Lösungen für $m_1(t) \ldots m_3(t)$ erheblich. Das System aus drei linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung muß mit den folgenden Anfangsbedingungen gelöst werden:

$$\frac{dm_1}{dt} = v \cdot c_0 - v \cdot \frac{m_1}{V}, \quad m_1(0) = 10 \tag{4.1}$$

$$\frac{dm_2}{dt} = v \cdot \frac{m_1}{V} - v \cdot \frac{m_2}{V} \quad m_2(0) = 0 \tag{4.2}$$

$$\frac{dm_3}{dt} = v \cdot \frac{m_2}{V} - v \cdot \frac{m_3}{V}, \quad m_3(0) = 0 \tag{4.3}$$

Das Computer-Algebra-System Mathematica liefert folgende Lösung:

$$\mathrm{m}_1[t] = e^{-\frac{t \cdot v}{V}} \cdot (m_0 - c_0 \cdot V + c_0 \cdot e^{\frac{t \cdot v}{V}} V)$$

$$\mathrm{m}_2[t] = \frac{e^{-\frac{t \cdot v}{V}} \cdot (-c_0 \cdot V^2 + c_0 \cdot e^{\frac{tv}{V}} V^2 + t \cdot v \cdot (m_0 - c_0 \cdot V))}{V}$$

$$\mathrm{m}_3[t] = \frac{e^{-\frac{t \cdot v}{V}} \cdot (-2 \cdot c_0 \cdot t \cdot v \cdot V^2 - 2 \cdot c_0 \cdot V^3 + 2 \cdot c_0 \cdot e^{\frac{tv}{V}} \cdot V^3 + t^2 \cdot v^2 (m_0 - c_0 \cdot V))}{2 \cdot V^2}$$

Die Funktionen $m_1(t), m_2(t)$ und $m_3(t)$ können mit einem Funktionsplotter wie GNUplot oder einem Mathematikprogramm wie DERIVE, MathCAD oder MAPLE V dargestellt werden.

4.2 Extremwertbestimmung

Wir bilden die 1. Ableitungen der Funktionen $m_2(t)$ und $m_3(t)$ nach der Zeit t und bestimmen deren Nullstellen.

$$\frac{dm_2}{dt} = \frac{e^{-\frac{t\cdot v}{V}} \cdot v \cdot (c_0 \cdot t \cdot v \cdot V + m_0 \cdot (-t \cdot v + V))}{V^2}$$

$$\frac{dm_3}{dt} = \frac{e^{-\frac{t\cdot v}{V}} \cdot t \cdot v^2 \cdot (-m_0 \cdot t \cdot v + 2 \cdot m_0 \cdot V + c_0 \cdot t \cdot v \cdot V)}{2 \cdot V^3}$$

Die Nullstelle der Funktion $m_2[t]'$ lautet:

$$t2_0 = \frac{m_0 \cdot V}{v \cdot (m_0 - c_0 \cdot V)} = 35.0877\,s$$

Die Nullstelle der Funktion $m_3[t]'$ lautet:

$$t3_0 = \frac{2 \cdot m_0 \cdot V}{v \cdot (m_0 - c_0 \cdot V)} = 70.1754$$

Interessant ist, daß das Maximum der Funktion $m_3(t)$ genau nach der doppelten Zeit des Maximums von $m_2(t)$ erreicht wird.
Für die numerischen Werte der Maxima erhalten wir:

$$m_2[t2_0] = c_0 \cdot V + e^{\frac{m_0}{-m_0+c_0\cdot V}}(m_0 - c_0 \cdot V) = 3.81567\,kg$$

$$m_3[t3_0] = c_0 \cdot V + e^{\frac{2m_0}{-m_0+c_0\cdot V}}(2 \cdot m_0 - c_0 \cdot V) = 2.87537\,kg$$