Skatabend

aus dem Übungsblatt *Gewöhnliche Differentialgleichungen*

der TU-Berlin

In einem Zimmer sitzen 4 Raucher und vergnügen sich beim Skatspiel. Das Zimmer enthalte V Liter Luft. Die Raucher stoßen je Minute Z Liter Zigarettenqualm aus, der 4 Volumenprozent Kohlenmonoxid (CO) enthalte und sich sofort mit der Zimmerluft gleichmäßig vermischt. Ein Ventilator ersetzt pro Minute Z Liter der Zimmerluft durch Frischluft.

1. Wie hoch ist t Minuten nach Beginn des Raucherabends die CO Konzentration im Raum ?
2. Nach welcher Zeit T wird eine CO Konzentration von 0.012 Prozent erreicht ? Wird ein Mensch zu lange diser Konzentration ausgesetzt, treten Schädigungen ein.
3. Sei $V = 40\,m^3$ und $Z = 2\,l \cdot min^{-1}$ - berechne T !

Punktezahl=8

Lösung

Bezeichne $y(t)$ die Volumenmenge an Kohlenmonoxid in der Zimmerluft. Je Zeiteinheit gelangen von den Rauchern $Z \cdot c$ Liter Kohlenmonoxid in das Zimmer. Durch den Ventilator fließen im gleichen Zeitraum Z Liter Luft mit der CO-Konzentration $\frac{y(t)}{V}$ ab. Die Funktion $y(t)$ beschreibt einen Ausgleichsvorgang erster Ordnung und genügt der Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dt} = Z \cdot c - \frac{Z \cdot y(t)}{V} \tag{1}$$

Als Anfangsbedingung befinde sich im Zimmer reine Luft:

$$AB: \quad y(t=0) = 0 \tag{2}$$

Die Integration der DGL liefert:

$$y(t) = c \cdot V \cdot [1 - e^{-\frac{tZ}{V}}] \tag{3}$$

Gesucht war die Konzentration an CO in der Zimmerluft. Wir teilen beide Seiten der Gleichung durch das Volumen V und erhalten :

$$C_{CO}(t) = \frac{y(t)}{V} = c \cdot [1 - e^{-\frac{tZ}{V}}] \tag{4}$$

Die Funktion nähert sich für $t \to \infty$ gegen c, wie die Abbildung 1 zeigt

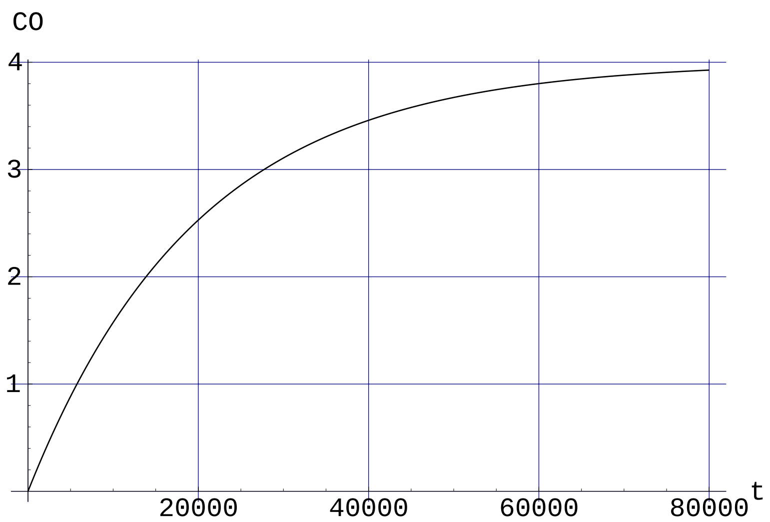

Abbildung 1: Verlauf der CO-Konzentration nach sehr großer Zeit

Für den zweiten und dritten Aufgabenteil ist die Zeit T gesucht, nach der eine bestimmte Konzentration b an Kohlenmonoxid erreicht ist:

$$C_{CO}(T) = b = c \cdot [1 - e^{-\frac{tZ}{V}}] \quad \rightarrow \quad T = \frac{V}{Z} \cdot \ln\left(\frac{c}{c-b}\right) \tag{5}$$

Für $c = 4$, $b = 0.012$, $V = 40000\,l$, $Z = 2\,l$ erhalten wir:

$$T = \frac{40000\,l}{2\,\frac{l}{min}} \cdot \ln\left(\frac{4}{4-0.012}\right) = 60.09018\,min \tag{6}$$

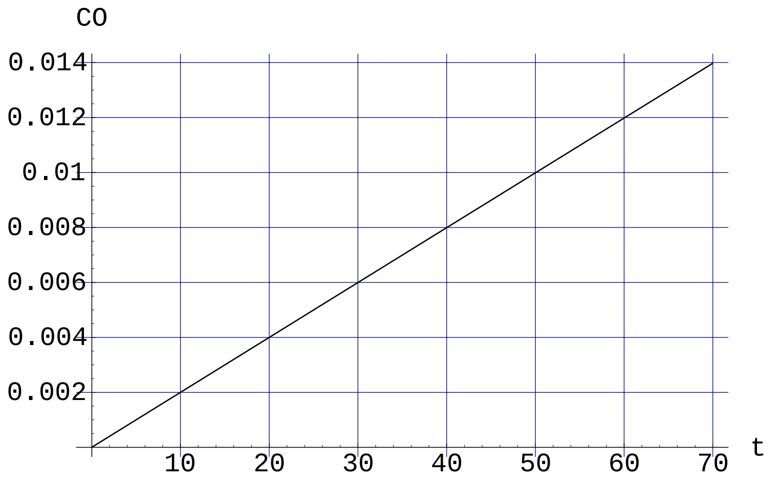

Abbildung 2: Verlauf der CO-Konzentration innerhalb der ersten 70 Minuten