Das Rätsel vom Käfer auf dem Gummiband

Die alten Ägypter glaubten angeblich, Osiris habe am Tempel in Luxor ein unsichtbares Gummiband der Länge $L = 1\,m$ befestigt, auf dessen Anfang er einen Scarabaeus gesetzt habe. Der heilige Käfer krabble mit der Geschwindigkeit 0.0035 Schoinen pro Stunde ($v_1 = \frac{1\,cm}{s}$) auf dem Band auf Osiris zu, während Osiris sich auf dem Weg in die Unterwelt mit der Geschwindigkeit 0.35 Schoinen pro Stunde ($v_2 = \frac{1\,m}{s}$) bewege und das unzerreißbare Gummiband so immer weiter dehne. Nun wissen wir, dass der Käfer den Gott auf diese Weise einholen wird. Wenn diese Ereignis geschehe, werde die Welt untergehen. Wann wird es nach Meinung der Ägypter so weit sein ?

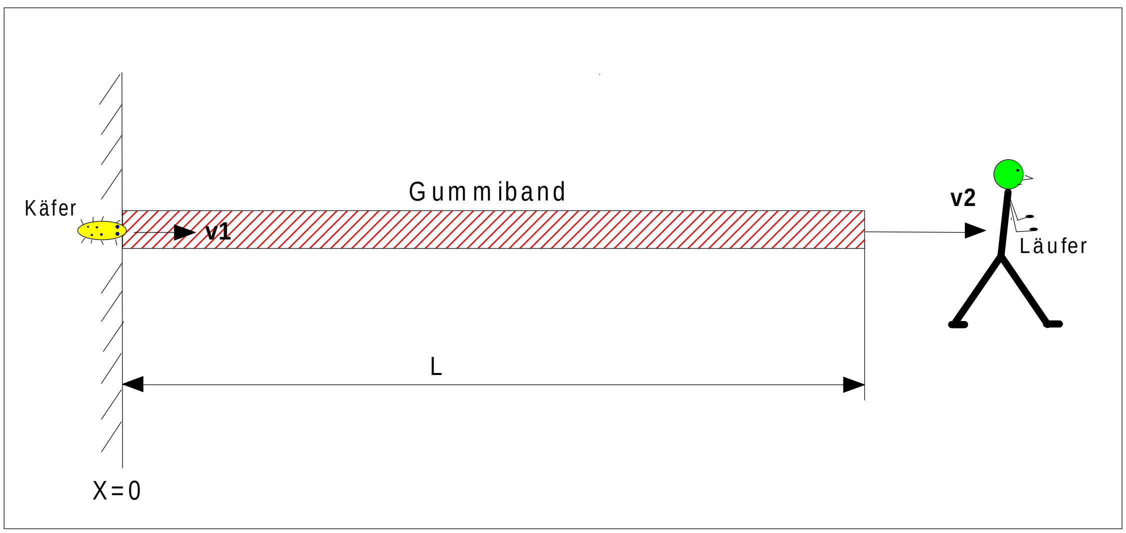

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe

Lösungsweg

Die Geschwindigkeit v_2 vom Läufer verteilt sich linear über die gesamte Bandlänge L. Die Bandlänge L ist eine lineare Funktion der Zeit t, da die Geschwindigkeit v_2 konstant ist :

$$L = f(t) = x_0 + v_2 \cdot t \tag{1}$$

Um die Fließgeschwindigkeit v_f des Gummibandes für einen bestimmten Ort x aus dem Intervall $0 < x < L$ zu berechnen gilt die Gleichung

$$v_f(x,t) = \frac{x}{L} \cdot v_2 = \frac{x}{x_0 + v_2 \cdot t} \cdot v_2 \tag{2}$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann man sich an dem Beispiel $x = \frac{L}{2}$, d.h. in der Mitte des Gummibandes, verdeutlichen. An diesem Ort beträgt die Fließgeschwindigkeit v_f genau die Hälfte der Geschwindigkeit v_2 vom Bandende.

Die Gesamtgeschwindigkeit v des Käfers bezüglich des Einspannpunktes $x = 0$ setzt sich aus seiner Eigengeschwindigkeit v_1 und der Fließgeschwindigkeit v_f des Gummibandes zusammen

$$v = v_1 + v_f = v_1 + \frac{x}{x_0 + v_2 \cdot t} \cdot v_2 \tag{3}$$

Anstelle der Geschwindigkeit v wird im folgenden der Differentialquotient $\frac{dx}{dt}$notiert. Formel (3) stellt eine *lineare, inhomogene* Differentialgleichung 1.Ordnung dar. In dem mathematischen Formelwerk [1] finden sich Lösungsansätze für derartige Differentialgleichungen. Dabei wird zunächst die homogene DGL mit dem Ansatz $x(t) = e^{\lambda \cdot t}$ gelöst. Hinweis : Bei der homogenen DGL wird q vorübergehend Null gesetzt. Anschließend wird mittels Variation der Konstanten eine spezielle Lösung ermittelt, wobei die Anfangsbedingungen zu berücksichtigen sind.

$$AB: \qquad x\,|_{t=0} = 0, \quad \frac{dx}{dt}\,|_{t=0} = v_1 \tag{4}$$

inhomogene DGL :

$$\frac{dx}{dt} + p \cdot x = q, \qquad p = -\frac{v_2}{x_0 + v_2 \cdot t} \qquad q = v_1 \tag{5}$$

Auf Grund der speziellen Gleichungskonstellation kann ein etwas vereinfachter Lösungsweg genutzt werden. Zunächst differenziert man die Geschwindigkeitsgleichung (3)einmal nach t.

Achtung ! Bei der totalen Differentiation nach t muß berücksichtigt werden, daß x eine zeitabhängige Funktion ist, d.h. es gilt $x = x(t)$.

Anschließend wird der Differentialquotient $\frac{dx}{dt}$ in Formel (6) mit Hilfe der rechte Seite von Gleichung (3) substituiert.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v_2 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot (x_0 + v_2 \cdot t) - (v_2)^2 \cdot x}{(x_0 + v_2 \cdot t)^2} \tag{6}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v_2 \cdot \left(v_1 + v_2 \cdot \frac{x}{(x_0+v_2 \cdot t)}\right) \cdot (x_0 + v_2 \cdot t) - (v_2)^2 \cdot x}{(x_0 + v_2 \cdot t)^2} \tag{7}$$

Nach Zusammenfassen der Terme entsteht Gleichung (8) . Es handelt sich um die Beschleunigungsgleichung für den Käfer. Die Gleichung enthält auf der rechten Seite lediglich die unabhängige Variable t, so daß mittels einfacher Integration die Geschwindigkeitsgleichung (9) entsteht.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v_1 \cdot v_2}{x_0 + v_2 \cdot t} \tag{8}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_1 \cdot v_2 \cdot \int \frac{dt}{x_0 + v_2 \cdot t} = v_1 \cdot \ln(x_0 + v_2 \cdot t) + K_1 \tag{9}$$

Aus der Anfangsbedingung (im Startmoment besitzt der Käfer nur seine Eigengeschwindigkeit v_1, da die Fließgeschwindigkeit v_f im Einspannpunkt gleich Null ist !) folgt für K_1 :

$$\frac{dx}{dt}\,|_{t=0} = v_1 = v_1 \cdot \ln(x_0 + v_2 \cdot t) + K_1 \quad \rightarrow \quad K_1 = v_1 \cdot (1 - \ln x_0) \tag{10}$$

$$v(t) = v_1 \cdot \left(1 + \ln \frac{x_0 + v_2 \cdot t}{x_0}\right) \tag{11}$$

Aus der letzten Gleichung kann der gesuchte Zeitpunkt t_1 berechnet werden , an dem der Käfer das Bandende erreicht hat. Am Bandende muß $v = v_1 + v_2$ betragen .

$$\frac{dx}{dt}\,|_{t=t_1} = v_1 + v_2 = v_1 \cdot \left(1 + \ln \frac{x_0 + v_2 \cdot t_1}{x_0}\right) \tag{12}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \ln \frac{x_0 + v_2 \cdot t_1}{x_0} \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{x_0}{v_2} \cdot \left(e^{\frac{v_2}{v_1}} - 1\right) \tag{13}$$

Die Zeit ist exponetiell vom Verhältnis der Geschwindigkeiten abhängig. Setzt man die in der Aufgabe genannten Zahlenwerte ein erhält man:

$$t_1 = \frac{1\,m}{1\frac{m}{s}} \cdot \left(e^{100} - 1\right) = 8.5239635394981463990760 \times 10^{35}\,Jahre$$

Damit dürfte der Weltuntergang noch “ einige “ Jahre auf sich warten lassen.

Auswertung

Gleichung (13) zeigt, daß der Käfer stets in *endlicher* Zeit das Bandende erreichen muß, sofern seine Eigengeschwindigkeit $v_1 > 0$ ist. Die Richtigkeit des Ergebnis kann an Hand der folgenden drei Grenzwertbetrachtungen bewiesen werden.

Geschwindigkeit $v_1 \to 0$

$$t_1 = \lim_{v_1 \to 0} \frac{x_0}{v_2} \cdot \left(e^{\frac{v_2}{v_1}} - 1 \right) \to t_1 = \frac{x_0}{v_2} \cdot e^{\infty} = \infty \tag{14}$$

Wenn der Käfer keine Eigengeschwindigkeit besitzt. d.h. $v_1 = 0$, bleibt er stets am Einspannpunkt fest sitzen und kann das Bandende nie erreichen.

Geschwindigkeit $v_2 \to 0$

$$t_1 = \lim_{v_2 \to 0} x_0 \cdot \left(\frac{e^{\frac{v_2}{v_1}} - 1}{v_2} \right) \to t_1 = \lim_{v_2 \to 0} x_0 \cdot \left(\frac{\frac{1}{v_1} \cdot e^{\frac{v_2}{v_1}}}{1} \right) = \frac{x_0}{v_1} \tag{15}$$

Für den Spezialfall, daß der Läufer sich nicht bewegt, folgt für die Zeit t_1 das Gesetz der gleichförmigen Bewegung. Der Käfer bewegt sich kontinuierlich von Punkt $x = 0$ bis zum Bandende $x = x_0$, mit seiner Eigengeschwindigkeit v_1. Das Gummiband verhält sich genauso als würde der Käfer auf einer starren Unterlage laufen.

Anfangsbandlänge $x_0 = 0$

$$t_1 = \lim_{x_0 \to 0} \frac{x_0}{v_2} \cdot \left(e^{\frac{v_2}{v_1}} - 1 \right) \quad \to \quad t_1 = 0 \tag{16}$$

Wenn das Band keine Anfangslänge besitzt hat der Käfer das Ende sofort erreicht. Diese Schlußfolgerung scheint trivial, zeigt aber daß Lösungsformel (13) korrekt ist, da der Grenzwert $t_1 = 0$ in diesem Fall lautet.

Entfernungsdifferenz zwischen Käfer und Läufer

Zum Abschluß soll die Entfernungsdifferenz zwischen Käfer und Läufer über der Zeit betrachtet werden. Den aktuellen Ort $x = x(t)$ erhält aus dem bestimmten Integral über die Funktion $v(t)$.

$$x(t) = \int_{t=0}^{t=t_1} v(t) \cdot dt \tag{17}$$

$$x(t) = \int_{t=0}^{t=t_1} v_1 \cdot \left(1 + \ln \frac{x_0 + v_2 \cdot t}{x_0} \right) \cdot dt \tag{18}$$

$$x(t) = \frac{v_1 \cdot (t \cdot v_2 + x_0) \cdot \ln \left[1 + \frac{t \cdot v_2}{x_0} \right]}{v_2} \tag{19}$$

Um die Entfernung zwischen Käfer und Läufer zu berechnen, muß die Differenz aus der Bandlänge $L(t)$ und dem aktuellen Ort des Käfers $x(t)$ gebildet werden.

$$x_{diff} = L(t) - x(t) \tag{20}$$

$$x_{diff} = x_0 + v_2 \cdot t - \frac{v_1 \cdot (t \cdot v_2 + x_0) \cdot \ln\left[1 + \frac{t \cdot v_2}{x_0}\right]}{v_2} \tag{21}$$

Die Zahlenwerte der ursprünglichen Aufgabenstellung werden geringfügig verändert, um nicht fortlaufend mit astronomischen Größen zu rechnen.

$$L = 3\,m, \quad v_1 = 1\,\frac{m}{s}, \quad v_2 = 0.1\frac{m}{s}$$

Im folgenden Diagramm ist der Funktionsverlauf in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt. Zu Beginn steigt die Differenz rasch an und läuft dann zunehmend in eine Begrenzungsphase. Anschließend entsteht ein fast linearer Abfall bis die Kurve die Zeitachse schneidet. Der Schnittpunkt ist der gesuchte Zeitpunkt t_1 zu dem der Käfer das Ende des Gummibandes erreicht hat.

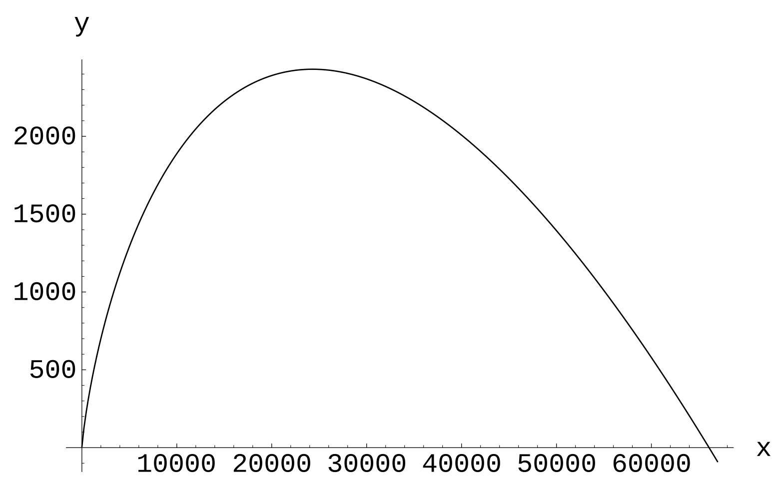

Abbildung 2: Entfernungsdifferenz zwischen Käfer und Läufer

Abschließend kann der Zeitpunkt t_2 berechnet werden, zu dem die Entfernungsdifferenz maximal wird. Es werden dazu die Nullstellen der 1.Ableitung von $x_{diff}(t)$ ermittelt:

$$\frac{x_{diff}}{dt} = \frac{L(t)}{dt} - \frac{x(t)}{dt} \tag{22}$$

$$\frac{x_{diff}}{dt} = v_2 - \frac{v_1 \cdot (t \cdot v_2 + x_0)}{\left[1 + \frac{t \cdot v_2}{x_0}\right] \cdot x_0} - v_1 \cdot \ln\left[1 + \frac{t \cdot v_2}{x_0}\right] = 0 \tag{23}$$

Nach Auflösung der transzendenten Gleichung erhält man:

$$t_2 = \frac{\left[\exp \frac{v_2 - v_1}{v_1} - 1\right] \cdot x_0}{v_2} = 24306.3\, s \tag{24}$$

Die maximale Ortsdifferenz folgt aus $x_{diff}(t_2)$:

$$x_{diff}(t_2) = \frac{v_1 \cdot x_0 \cdot \exp \frac{v_2 - v_1}{v_1}}{v_2} = 2430.3\, m \tag{25}$$

Literatur

[1] Bartsch, H.J. : Mathematische Formeln, Fachbuchverlag Leipzig 1984