Ein Dreieck mit konstanten Flächeninhalt

eine Aufgabe von Ingmar Rubin

4. März 2004

Gesucht ist eine Kurvengleichung $y(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Tangente t in einem beliebigen Kurvenpunkt $P(x, y)$ schneidet die $x-$Achse im Punkt S,
- Der Radiusvektor vom Ursprung zum Punkt $P(x, y)$ bildet mit der Tangente und der $x-$ Achse das Dreieck OPS,
- Wie lautet die Funktion $y(x)$ wenn das Dreieck OPS für jeden Punkt $P(x, y)$ den konstanten Flächeninhalt $A = a^2$ besitzt?
- Zeichne die Funktion $y(x)$ für $P(2, 3)$ und $a = 2.8$

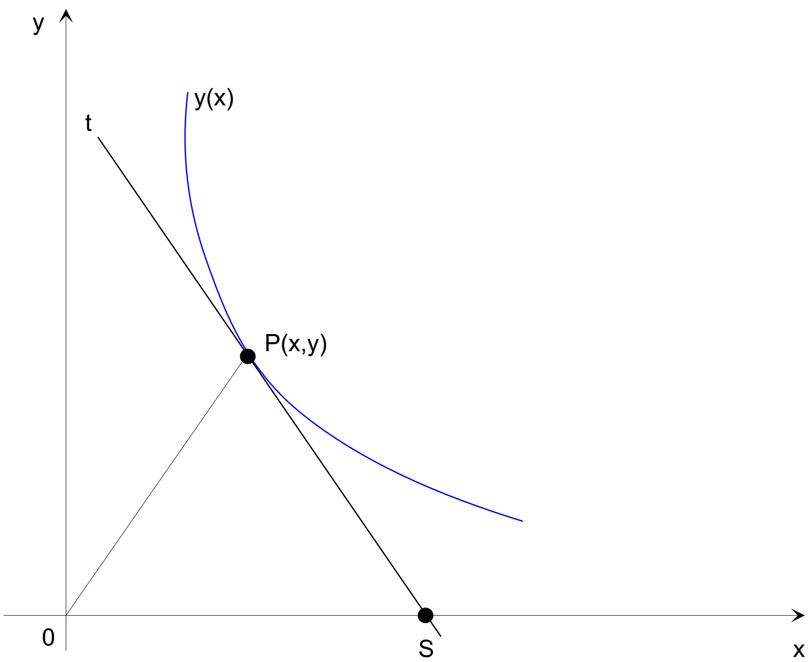

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabenstellung

Lösungsweg

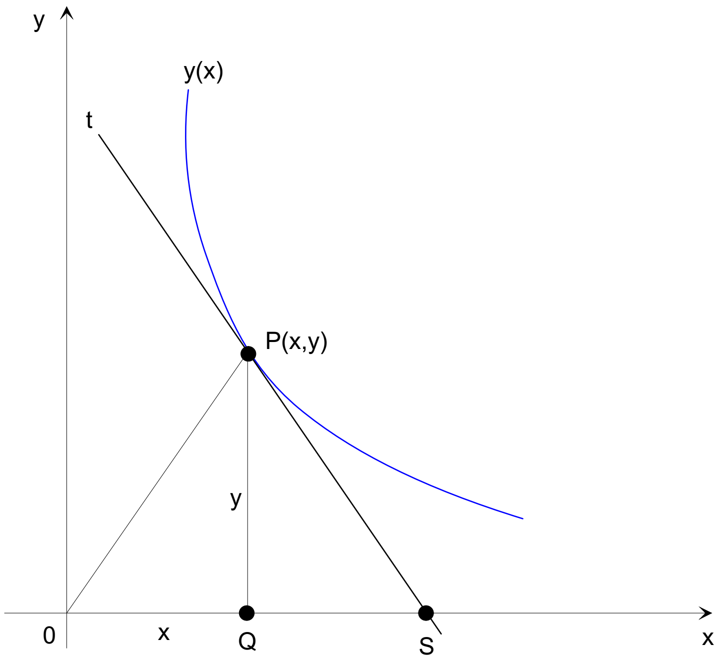

Abbildung 2: Skizze zum Lösungsweg

Das Dreieck OPS kann in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden, in dem vom Kurvenpunkt P das Lot auf die x-Achse gefällt wird. Der Fußpunkt des Lotes auf der x-Achse sei mit Q bezeichnet. Der Flächeninhalt für Dreieck OPQ lautet:

$$\triangle OPQ: \qquad A_1 = \frac{x \cdot y(x)}{2} \tag{1}$$

Tangentengleichung für t im Kurvenpunkt $P(x,y)$:

$$y(x) = x \cdot y'(x) + n \qquad n = y(x) - x \cdot y'(x) \tag{2}$$

Schnittpunkt zwischen Tangente und x-Achse:

$$0 = x_s \cdot y'(x) + y(x) - x \cdot y'(x) \qquad x_s = x - \frac{y(x)}{y'(x)} \tag{3}$$

Der Flächeninhalt vom Dreieck QPS brechnet sich aus:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot (x_s - x) \cdot y(x) = -\frac{y^2}{2 \cdot y'(x)} \tag{4}$$

Die Summe aus A_1 und A_2 soll konstant a^2 betragen. Damit ist die Differentialgleichung für die Bestimmung von $y(x)$ hergeleitet:

$$A_1 + A_2 = \frac{x \cdot y(x)}{2} - \frac{y^2}{2 \cdot y'(x)} = a^2 \tag{5}$$

Die nichtlineare DGL 1.Ordnung wurde mit Hilfe von Mathematica gelöst. Die allgemeine Lösung lautet:

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(x \cdot C[1]^2 + \sqrt{-4 \cdot a^2 \cdot C[1]^2 + x^2 \cdot C[1]^4}\right) \tag{6}$$

Über die Konstante $C[1]$ kann aus der Lösungsschar aller Kurven eine spezielle Lösung ermittelt werden. Für $P(2,3)$ folgt die spezielle Lösung:

$$y(x) = \frac{-9x + \sqrt{36a^2(-6+a^2) + 81x^2}}{2(-6+a^2)} \tag{7}$$

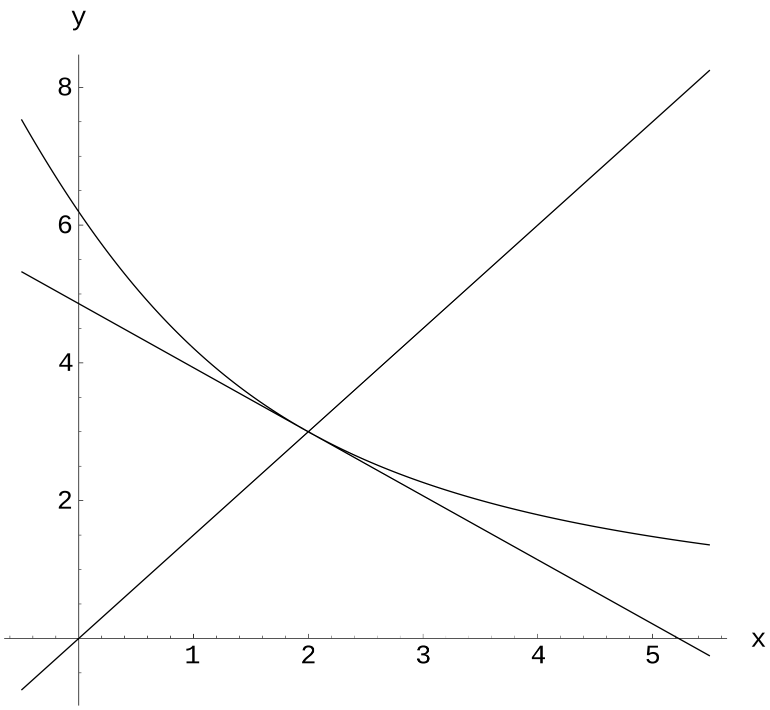

Abbildung 3: Lösungskurve $y(x)$ für $P(2,3)$ und $a = 2.8$