

Bodenfrost

Eine Aufgabe von Ingmar Rubin

5. Oktober 2003

Sei ϑ die Temperatur eines Körpers und ϑ_A die Temperatur seiner Umgebung. Dann existiert eine positive Konstante k und die Temperatur des Körpers gehorcht der DGL

$$\dot{\vartheta}(t) = -k(\vartheta(t) - \vartheta_A(t)) \quad (\text{Newtonsches Abkühlungsgesetz})$$

Im Monat Oktober 1996 wurden vom Meteorologischen Amt Potsdam folgende Temperaturaufzeichnungen veröffentlicht. Am 1. Oktober um 2 Uhr Morgens betrug die Lufttemperatur -3° (Tagesminimum). Im Laufe des Tages erwärmte sich die Luft auf $+11^\circ$, gemessen um 14 Uhr.

Auf Grund der kürzeren Sonneneinstrahlung und des flacheren Einstrahlungswinkels fällt die durchschnittliche Tagestemperatur zum Ende des Monats um $\vartheta_e = 4^\circ$ ab.

Der Temperaturverlauf, gemessen über einen Tag, genüge einer Cosinusfunktion, wobei das Minimum stets um 2 Uhr Morgens und das Maximum stets um 14 Uhr Nachmittags liege.

In einem Meter unter der Erdoberfläche genüge die Funktion des Temperaturverlaufes $\vartheta(t)$ dem Newtonschen Abkühlungsgesetz, wobei $k = 0.1$ betrage.

1. Ermittle die Funktion der Lufttemperatur $\vartheta_A(t)$ im Monat Oktober.
2. Zeichne $\vartheta_A(t)$ für den 1. Oktober und 30. Oktober über je 24 h.
3. Ermittle den Temperaturverlauf $\vartheta(t)$ einen Meter unter der Erdoberfläche, wobei $\vartheta(t = 0) = +2^\circ$ betrage.
4. Zeichne die Funktionen $\vartheta(t)$ und $\vartheta_A(t)$ in ein Diagramm für den 1. Oktober und für den 30. Oktober
5. Welche Aussagen können bezüglich der Gefahr von Bodenfrost in einem Meter Tiefe getroffen werden ?

Punktzahl=8