Wachstum einer Bakterienkultur

aus dem Übungsblatt *Gewöhnliche Differentialgleichungen*

der TU-Berlin

Eine Bakterienkultur werde der Wirking eines Toxins ausgesetzt. Die dadurch bewirkte Todesrate ist proportional zu dem Produkt aus der Anzahl der vorhandenen Bakterien und dem vorhandenen Toxin. Die Proportionalitätskonstante dieses Vorgangs sei a. Ohne das Toxin würde sich die Bakterienkultur mit einer Wachstumsrate vermehren, die proportional zu der Anzahl der vorhandenen Produktion des Toxins ist. Diese Proportionalitätskonstante sei b. Die Produktions des Toxinsgehalts $T(.)$ beginne zur Zeit $t = 0$, und $T(.)$ nehme konstant zu, d.h. $T(0) = 0$, $T'(t) = c$, $c > 0$. Es sei $B(t)$ die Anzahl der lebenden Bakterien zur Zeit t, $t \geq 0$, und sei $B(0) = B_0 > 0$.

1. Stelle die Differentialgleichung 1. Ordnung für $B(.)$ auf.
2. Löse diese Differentialgleichung.
3. Was passiert im Limes $t \to \infty$?
4. Zeichne die Funktion für $a = 0.1$, $b = 0.5$, $c = 0.3$, $B_0 = 50$ im Intervall $0 \leq t \leq 40$!

Lösung der Aufgabe

Die Wachstumsgeschwindigkeit der Bakterienkultur ist über die folgende DGL bestimmt:

$$\frac{dB}{dt} = b \cdot T(t) - a \cdot B(t) \cdot T(t), \qquad AB: \quad B(0) = B_0 \tag{1}$$

Die Menge des Toxins nimmt über der Zeit linear zu, wobei $T(0) = 0$ gilt :

$$T(t) = c \cdot t \tag{2}$$

In Gleichung (1) wird $T(t) = c \cdot t$ eingesetzt:

$$\frac{dB}{dt} = b \cdot c \cdot t - a \cdot B(t) \cdot c \cdot t, \qquad AB: \quad B(0) = B_0 \tag{3}$$

Die Lösung der linearen DGL ergibt in *Mathematica*:

$$B(t) = \frac{b + (a\,B_0 - b) \cdot e^{\frac{-a\,c\,t^2}{2}}}{a} \tag{4}$$

Der Grenzwert für $t \to \infty$ ergibt:

$$\lim_{t\to\infty} \left[\frac{b + (a\,B_0 - b) \cdot e^{\frac{-a\,c\,t^2}{2}}}{a} \right] = \frac{b}{a} \tag{5}$$

Die Funktionsgraphik zeigt, wie sich $B(t)$ mit wachsenden t dem Grenzwert $\frac{b}{a} = 5$ nähert.

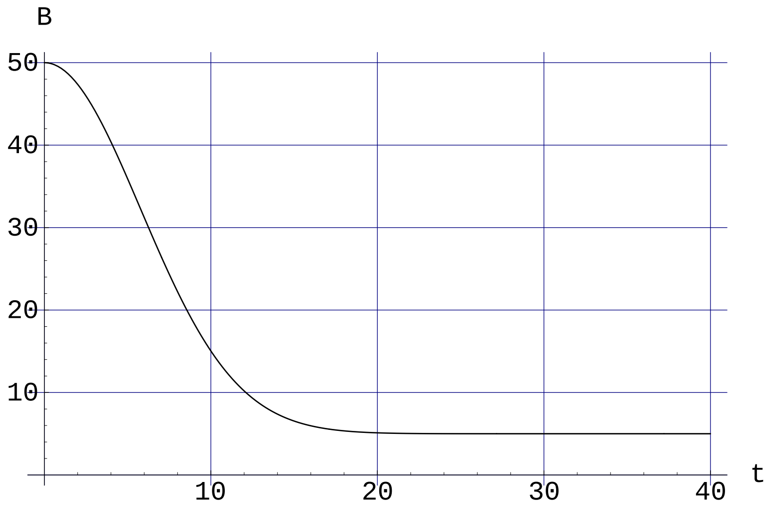

Abbildung 1: Verlauf der Bakterienmenge $B(t)$ über der Zeit