

Der Scheich und seine 100 Töchter

eine Aufgabe von Inge Hachtel

18. Juli 2001

Ein Scheich hat 100 Töchter. Jede soll eine Mitgift bekommen. Der Scheich hat dafür 1.000.000 DM vorgesehen. Aber es bekommt nicht jede dieselbe Summe: Die zweite Tochter bekommt $99/100$ von dem, was die erste bekommt, die dritte $98/99$ von dem, was die zweite bekommt, die vierte $97/98$ von dem, was die dritte bekommt. usw.

Was bekommt die erste Tochter und was bekommt die 100. Tochter ausgezahlt ?

Punktezahl=5

Auflösung des Rätsels

Wir führen folgende Bezeichner ein:

- s Summe die der Scheich seinen 100 Töchtern gibt,
- n Anzahl der Töchter,
- x_1 Anteil den die erste Tochter bekommt,
- x_i Anteil den die i -te Tochter bekommt.

Die Zweite und Dritte Tochter erhalten nach Aufgabentext:

$$x_2 = \frac{99}{100} x_1, \quad x_3 = \frac{99 \cdot 98}{100 \cdot 99} \cdot x_1, \quad x_4 = \frac{99 \cdot 98 \cdot 97}{100 \cdot 99 \cdot 98} \cdot x_1 \quad (1)$$

Wenn die jeweils gleichen Faktoren aus Zähler und Nenner gegeneinander gekürzt werden, erhält man als verallgemeinerte Formel :

$$x_i = x_1 \cdot \frac{n+1-i}{n}, \quad i > 1, n = 100 \quad (2)$$

Die Summe über alle Töchter muß am Ende dem vom Scheich ausgesetzten Betrag von $s = 1.000.000 \text{ DM}$ ergeben, also:

$$s = x_1 + x_1 \cdot \sum_{i=2}^n \frac{n+1-i}{n} \quad (3)$$

Mit Hilfe eines Computeralgebraprogramms berechnen wird die endliche Summe :

$$s = x_1 + x_1 \cdot \frac{n-1 + n \cdot (n-1) - \frac{1}{2}(n+2)(n-1)}{n} = \frac{x_1 \cdot (1+n)}{2} \quad (4)$$

Mit $n = 100$ und $s = 1000000$ erhalten wir:

$$x_1 = \frac{2 \cdot s}{n+1} = \frac{2000000}{101} = 19801.980198 \quad (5)$$

Die erste Tochter erhält also rund 19802 DM ausgezahlt. Für die 100. Tochter ergibt sich:

$$x_{100} = x_1 \cdot \frac{n+1-100}{n} = \frac{x_1}{100} = 198.02 \text{ DM} \quad (6)$$
