

# 400 *m* - Lauf

40. Mathematikolympiade

Magdeburg, 13. - 16. Mai 2000

Andreas, Martin und Robert starten gleichzeitig zum 400 *m* Lauf. Als Andreas im Ziel war, hatte Martin noch genau 20 *m* zu laufen. Als Martin als zweiter Läufer das Ziel erreichte, blieben für Robert noch 20 *m*.

Wie weit war Robert vom Ziel entfernt, als Andreas das Ziel erreichte ?

Es sei angenommen, dass jeder der drei Genannten die gesamte Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchliefen.

Punktezahl=6

**Lösungsvorschlag 1**

von Jens Wiemann

Wir nehmen an, Andreas läuft mit der Geschwindigkeit  $v_1$ , Martin mit Geschwindigkeit  $v_2$  und Robert mit Geschwindigkeit  $v_3$ . Aus der Zieldifferenz Andreas minus Martin = 20m folgt dann,

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{400 \text{ m} - 20 \text{ m}}{400 \text{ m}} = 0.95 \cdot v_1 \quad (1)$$

Ebenso folgt aus der Zieldifferenz Martin minus Robert = 20m

$$v_3 = v_2 \cdot \frac{400 \text{ m} - 20 \text{ m}}{400 \text{ m}} = 0.95 \cdot v_2 \quad (2)$$

Daraus folgt das Geschwindigkeitsverhältnis  $v_1 \div v_3$  zu

$$v_3 = 0.95 \cdot v_2 = 0.95 \cdot 0.95 \cdot v_1 \quad (3)$$

Wenn wir das Geschwindigkeitsverhältnis  $v_1 \div v_3$  nun auf die 400m Strecke anwenden, erhalten wir:

$$s_3 = 400 \text{ m} \cdot 0.95 \cdot 0.95 = 361 \text{ m} \quad (4)$$

Die gesuchte Differenz Andreas minus Robert beträgt dann  $400 \text{ m} - 361 \text{ m} = 39 \text{ m}$ .

## Lösungsvorschlag 2

*Ingmar Rubin, Berlin*

Wir fertigen ein  $s - t$  Diagramm an, in das wir die drei Bewegungsgleichungen der Läufer einzeichnen. Da alle Drei gleichzeitig im Start loslaufen, beginnen die drei Geraden mit  $v = \text{const.}$  im Koordinatenursprung. Der unterschiedliche Anstieg charakterisiert die unterschiedlich hohen Geschwindigkeiten der Läufer. Die Zeiten  $t_1, t_2, t_3$  bezeichnen die Zeitpunkte, zu denen jeder Läufer das 400m

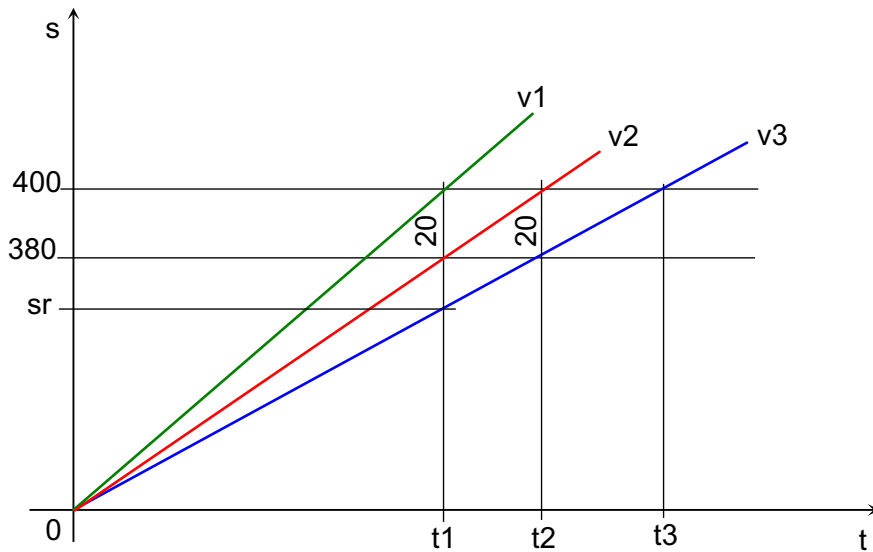


Abbildung 1: Weg-Zeit-Diagramm der 400 m - Läufer

Ziel erreicht, also :

$$t_1 = \frac{s}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s}{v_2}, \quad t_3 = \frac{s}{v_3}, \quad s = 400 \text{ m} \quad (5)$$

Bezeichne  $s_r$  den Ort von Robert am Zeitpunkt  $t_1$ . Mit dem Strahlensatz lassen sich zwei Verhältnisgleichungen aufstellen :

$$\frac{t_1}{s - 20} = \frac{t_2}{s}, \quad \frac{t_2}{s - 20} = \frac{t_1}{s_r} \quad (6)$$

Wir lösen nun beide Gleichungen nach  $t_2$  auf und können anschließend  $t_1$  eliminieren:

$$t_2 = \frac{s \cdot t_1}{s - 20} = \frac{t_1 \cdot (s - 20)}{s_r} \quad \rightarrow \quad s_r = \frac{(s - 20)^2}{s} = 361 \text{ m} \quad (7)$$

Die Differenz zwischen  $s - s_r$  gibt die gesuchte Entfernung von Robert zum Ziel am Zeitpunkt  $t_1$  :

$$\Delta s = s - s_r = 400 - 361 = 39 \text{ m} \quad (8)$$